# *Teichmüllerraum für total degenerierte Kurven*

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
Bernd Brinkmann
aus Menden

Bochum 1989

UNIV.
LEIDEN
NEL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543113_0003

# *Teichmüllerraum für total degenerierte Kurven*

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
Bernd Brinkmann
aus Menden

Bochum 1989

1. Gutachter: Prof. Dr. L. Gerritzen

2. Gutachter: Prof. Dr. H. Zieschang

Tag der mündlichen Prüfung: 4.7.1989

# Inhaltsverzeichnis


| | | | |
|---|---|---|---|
| §1 | **Einleitung** | | 3 |
| | | Vorwort | 3 |
| | $\mathcal{A}$ | Verallgemeinerte Schottky-Überlagerung | 5 |
| | $\mathcal{B}$ | Der erweiterte Schottkyraum $\bar{S}_g$ | 8 |
| | $\mathcal{C}$ | $B_n$ | 13 |
| §2 | $T_g^d$ | | 15 |
| §3 | **Der Durchschnitt zweier Komponenten** | | 28 |
| §4 | **Der Komplex von Culler-Vogtmann** | | 37 |
| §5 | **Spezialfall g=2 und g=3** | | 43 |
| | $\mathcal{A}$ | g=2 | 43 |
| | $\mathcal{B}$ | g=3 | 45 |
| §6 | **Anhang** | | 50 |
| | **Literatur** | | 67 |

# §1 Einleitung

## Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Teichmüllerraum $T_g^d$ ($g \geq 2$) für total degenerierte Kurven, d.h., für projektive Kurven, bei denen jede Komponente isomorph zu $P_1$ und jeder singuläre Punkt ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist. Die Punkte von $T_g^d$ entsprechen total degenerierten Kurven zusammen mit einer Auswahl einer Basis der Fundamentalgruppe, welche isomorph zu $F_g$, der freien Gruppe vom Rang g, ist. Das Hauptergebnis ist, daß $T_g^d$ einfach zusammenhängend ist. Auf $T_g^d$ operiert die äußere Automorphismengruppe von $F_g$. Der Quotient ist Modulraum für total degenerierte Kurven. Als Korollar erhält man, daß auch dieser Modulraum einfach zusammenhängend ist. Zur Konstruktion von $T_g^d$ geht man vom gewöhnlichen Schottkyraum $S_g$ aus. $S_g$ parametrisiert kompakte Riemannsche Flächen $X$ vom Geschlecht g mit einer Zusatzstruktur. Für diese Zusatzstruktur benötigt man eine Schottky–Überlagerung $\tilde{X}$ von $X$. Die Decktransformationsgruppe $Deck(\tilde{X}|X)$ ist isomorph zu $F_g$. Die Zusatzstruktur ist dann gegeben durch die Schottky–Überlagerung zusammen mit einer Auswahl einer Basis der Decktransformationsgruppe. $S_g$ wird durch Hinzunahme von Punkten, die singulären Kurven entsprechen, in einen Raum $\bar{S}_g$ eingebettet (siehe [GH]). Als "äußersten" Rand in $\bar{S}_g$ hat man den Raum $T_g^d$. Die Schottky–Überlagerung ist hier stets die universelle Überlagerung, d.h., die Zusatzstruktur auf diesen Kurven besteht nur noch in der Auswahl einer Basis der Fundamentalgruppe. Der Raum $T_g^d$ läßt sich auch ohne den Umweg über $\bar{S}_g$ direkt konstruieren (siehe [P]). Diese Begriffe werden im ersten Paragraphen erläutert.

Im zweiten Paragraphen wird dann der Raum $T_g^d$ genauer untersucht. Es stellt sich heraus, daß er aus unendlich vielen, zueinander isomorphen, glatten Komponenten der Dimension $2g-3$ besteht. Über $\bar{S}_g$ hat man eine universelle Familie von Kurven mit Schottky–Struktur, d.h., über $T_g^d$ hat man die universelle Familie von degenerierten Kurven zusammen mit ihrer universellen Überlagerung und der Aktion von $F_g$ auf dieser. Die Eigenschaft eines Punktes in $T_g^d$, zu einer bestimmten Komponente zu gehören, läßt sich durch eine Eigenschaft der Aktion der freien Gruppe auf der universellen Überlagerung ausdrücken.

Mit Hilfe dieser Charakterisierung wird im dritten Paragraphen der Durchschnitt zweier Komponenten berechnet. Es zeigt sich, daß dieser Durchschnitt glatt und einfach zusammenhängend ist. Außerdem wird ein leicht zu prüfendes Kriterium angegeben, mit dem sich entscheiden läßt, ob zwei Komponenten sich schneiden.
Im vierten Paragraphen wird der Zusammenhang zum Komplex von Culler–Vogtmann (siehe [CV]) hergestellt. Diese betrachten metrisierte Graphen vom Geschlecht g zusammen mit einer Auswahl einer Basis der Fundamentalgruppe, welche ebenfalls isomorph zu $F_g$ ist. Der Raum $K_g$, der diese Objekte parametrisiert, ist ein Komplex, der durch offene Teile überdeckt werden kann, die den Komponenten von $T_g^d$ entsprechen und das gleiche Schnittverhalten haben. Aus der Tatsache, daß $K_g$ einfach zusammenhängend ist, läßt sich folgern, daß $T_g^d$ ebenfalls einfach zusammenhängend ist.
In einem fünften Paragraphen wird der Raum $T_g^d$ für $g = 2, 3$ genauer untersucht. Insbesondere wird berechnet, welche Komponenten sich schneiden. In einem Anhang wird das Schnittverhalten für $g = 3$ in Tabellen aufgelistet.

## *A* Verallgemeinerte Schottky-Überlagerungen

In diesem Paragraphen sollen zunächst die für diese Arbeit wesentlichen Ergebnisse aus [GH] ohne Beweis angeführt werden. Es soll ein feiner Modulraum $\bar{S}_g$ für stabile Riemannsche Flächen mit Schottky-Struktur konstruiert werden.

**Def.1:** Sei X eine orientierbare, kompakte, zusammenhängende Kurve über C.

a) X heißt *stabil*, wenn gilt:
   (i) Jede Singularität von X ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt.
   (ii) Für jede Komponente L von X gilt:
   L schneidet mindestens $3 - 2g(L)$ andere Komponenten.

b) Der Schnittgraph $G_X$ einer Kurve X ist gegeben durch:
   Die Knoten von $G_X$ entsprechen den Komponenten von X. Für jeden Punkt in $Sing(X)$ erhält man eine Kante:
   Liegt der Punkt auf zwei Komponenten, so verbindet man die entsprechenden Knoten. Liegt der Punkt nur auf einer Komponente, so erhält man eine Schleife an dem entsprechenden Knoten.

c) Sei

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} L_i$$

   $L_i$ die Komponenten von X.
   Setze

$$g(X) = \sum_{i=1}^{r} g(L_i) + g(G_X)$$

Um nun eine Schottky-Struktur auf X zu erklären, soll die Fläche in g(X) Jordankurven aufgeschnitten werden.

**Def.2:** Ein *Schnittsystem* $c=(c_1, \ldots, c_g)$ ist ein g-Tupel von Wegen $c_i$ mit:
(i) $c_i$ ist einfach geschlossener Jordanweg, der keine Singularität trifft, oder ein konstanter Weg in einer Singularität.
(ii) $c_i \cap c_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

(iii) $X \setminus \bigcup Spur(c_i) =: X \setminus c$ ist zusammenhängend.
(iv) Der Schnittgraph von $X \setminus c$ ist ein Baum.
(v) Alle Komponenten von $X \setminus c$ haben Geschlecht 0.

Damit läßt sich erklären, was eine Schottky-Überlagerung relativ zu c ist.

**Def.3:** $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ sei eine unverzweigte Überlagerung.
a) $p$ heißt *normal*, wenn das Bild von

$$\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{X}, a) \to \pi_1(X, p(a))$$

ein Normalteiler ist. Für die Decktransformationsgruppe $D(\tilde{X}|X)$ gilt dann:

$$D(\tilde{X}|X) \cong \pi_1(X, p(a))/\pi_1(p)[\pi_1(\tilde{X}, a)] \quad ,$$

d.h., man hat einen surjektiven Homomorphismus

$$\pi_1(X, p(a)) \to D(\tilde{X}|X) \quad .$$

b) $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ heißt *Schottky-Überlagerung* relativ zu c, wenn gilt:
(i) Die Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(X \setminus c)$ sind vermöge $p$ homöomorph zu $X \setminus c$ .
(ii) Ist $\tilde{Y} \xrightarrow{q} X$ eine Überlagerung von X und sind die Zusammenhangskomponenten von $q^{-1}(X \setminus c)$ vermöge $q$ homöomorph zu $X \setminus c$ , so gibt es eine stetige Abbildung $f : \tilde{X} \to Y$, so daß $q \circ f = p$ .

**Lemma1:** *Zu jeder orientierbaren, stabilen Fläche X vom Geschlecht g und jedem Schnittsystem c auf X gibt es eine eindeutig bestimmte Schottky-Überlagerung $\tilde{X}$ relativ zu c.*
*Es ist $D(\tilde{X}|X) \cong F_g$, wobei $F_g$ die freie Gruppe vom Rang g ist.*

**Bew.:** [GH], Seite 192–193

Um einen feinen Modulraum betrachten zu können, werden nun Familien von Kurven erklärt.

**Def.4:** Sei $\pi : X \to U$ eine stetige, surjektive, offene Abbildung.

a) $\pi$ heißt *Familie von stabilen Kurven*, wenn gilt:

(i) für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung V von $x$, so daß gilt:
$V \xrightarrow{\pi} \pi(V)$ ist homöomorph zur Projektion

$$\pi(V) \times D \to \pi(V) \quad .$$

wo D offener Einheitskreis in C,
oder:
$V \xrightarrow{\pi} \pi(V)$ ist homöomorph zur Projektion

$$\{(z, w, t) \in C^3 \times \pi(V) : z \cdot w = f(t)\} \to \pi(V) \quad ,$$

wo f eine stetige, surjektive Funktion von $\pi(V)$ nach C ist.

(ii) $X_u = \pi^{-1}(u)$ ist stabile Kurve für jedes $u \in U$.

b) Ein Weg c in $X|U$ ist eine stetige Abbildung

$$c : U \times I \to X, \text{ mit } c(u,t) \in X_u \, \forall u \in U, t \in I = [0,1]$$

Ein Schnittsystem $c = (c_1, \ldots, c_g)$ für eine Familie von stabilen Kurven ist ein g-Tupel von Wegen $c_i$, so daß $c_u = (c_{1,u}, \ldots, c_{g,u})$ ein Schnittsystem für $X_u$ ist.

c) Ist $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\pi}} U$ eine weitere Familie über U, so heißt eine stetige Abbildung $f : \tilde{X} \to X$ unverzweigt, falls $\pi \circ F = \tilde{\pi}$ ist und es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung V von $x$ gibt, so daß die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(V)$ vermöge f homöomorph zu V sind.
Für jeden Punkt $u \in U$ ist dann die Abbildung $\tilde{\pi}_u : \tilde{X}_u \to X_u$ eine unverzweigte Überlagerung.

d) $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ heißt normal, wenn jedes $\pi_u$ normal ist.

Es gilt nun analog zu Lemma 1:

**Lemma2:** *Sei $X|U$ eine Familie von stabilen Flächen vom Geschlecht g, $c = (c_1, \ldots, c_g)$ ein Schnittsystem, dann gibt es eine Familie $\tilde{X}|U$ und eine*

*normale Überlagerung* $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$, *so daß für jedes* $u \in U$ *die induzierte Überlagerung* $\tilde{X}_u \to X_u$ *eine Schottky-Überlagerung relativ zum Schnittsystem* $c_u$ *auf* $X_u$ *ist.* $\tilde{X}|U$ *und* $f$ *sind eindeutig bestimmt, und* $D(\tilde{X}|X) \cong F_g$.

**Bew.:** [GH], Seite 193–194.

**Def.5:**

a) Eine Überlagerung $\tilde{X}|U \xrightarrow{f} X|U$ heißt *Schottky-Überlagerung*, wenn es für jeden Punkt $u \in U$ eine offene Umgebung V von $u$ und ein Schnittsystem c für $X|V$ gibt, so daß $\tilde{X}|V \to X|V$ die Schottky-Überlagerung von $X|V$ relativ zu c ist.

b) Sei $X|U$ eine Familie von stabilen Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$. Eine *Schottky-Struktur* auf $X|U$ ist eine Schottky-Überlagerung $\tilde{X}|U \to X|U$ und ein Isomorphismus

$$\sigma : D(\tilde{X}|X) \to F_g \quad ,$$

wobei $\sigma \approx \sigma'$, falls sie sich um einen inneren Automorphismus von $F_g$ unterscheiden.

Als nächstes wird nun ein feiner Modulraum für Familien von Kurven mit Schottky-Struktur konstruiert.

## *B* Der erweiterte Schottkyraum $\bar{S}_g$

Wie für den gewöhnlichen Schottkyraum nimmt man die Fixpunkte und Multiplikatoren der Basiselemente als Koordinaten. Die Aktion von $PGL_2$ berücksichtigt man, nicht indem man drei Fixpunkte normiert, sondern indem man die Doppelverhältnisse der Fixpunkte betrachtet. Um von der Wahl einer speziellen Basis unabhängig zu sein, betrachtet man die Doppelverhältnisse aller anziehenden Fixpunkte aller primitiven Elemente der Schottkygruppe, um Koordinaten zu bekommen. Man wird sehen, daß lokal immer endlich viele Koordinaten ausreichen, im Gegensatz zu $S_g$ global aber unendlich viele gebraucht werden. Da der abstoßende Fixpunkt einer Transformation der anziehende Fixpunkt der inversen Transformation ist und der Multiplikator eines Elementes $\gamma$ das Doppelverhältnis der

Fixpunkte von $\gamma, \gamma^{-1}, \gamma', \gamma\gamma'\gamma^{-1}$ für beliebiges $\gamma'$ ist, reichen diese Doppelverhältnisse als Koordinaten aus.
In $S_g$ sind die Doppelverhältnisse von Fixpunkten immer ungleich $0, 1, \infty$. Die Degeneration liegt darin, daß Doppelverhältnisse auch diese Werte annehmen können. Die Fixpunkte liegen dann nicht auf der gleichen Komponente der Kurve. Im folgenden soll nun die Konstruktion von $\bar{S}_g$, wie sie in [GH], Seite 194–198 beschrieben ist, kurz erläutert werden.

Sei

$$I = \{\gamma \in F_g : \gamma \neq id, \gamma \neq (\gamma')^n \; \forall \gamma' \in F_g, n > 1\}$$

die Menge der primitiven Elemente in $F_g$.
Sei $V \subset I^4$ die Menge aller Viertupel mit paarweise verschiedenen Einträgen. $F_g$ operiert auf V durch Konjugation.

**Def.6:** $B_I$ sei der abgeschlossene Unterraum von $P_1^V$, gegeben durch folgende inhomogen geschriebene Gleichungen:

(i) $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} = (\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4,\gamma_3})^{-1}$
(ii) $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} = 1 - \lambda_{\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_1}$
(iii) $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} \cdot \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4,\gamma_5} = \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5}$

für alle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \in F_g$, dabei ist

$$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} = \frac{a_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}}{b_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}} \quad \text{Koordinatenfunktion.}$$

**Bem.1:** Diese Gleichungen beschreiben die Relationen, die Doppelverhältnisse erfüllen. In $S_g$ läßt sich mit der Gleichung (iii) aus den Werten für eine Basis von $F_g$ jede andere Koordinate errechnen. Falls jedoch Koordinaten 0 sind, ist dies nicht mehr möglich.
Die Aktion von $F_g$ auf V induziert eine Aktion auf $P_1^V$, gegeben durch:

$$\gamma((a_\nu)_{\nu \in V}) = (a_{\gamma\nu\gamma^{-1}})_{\nu \in V} \quad ,$$

wobei die Konjugation des Viertupels die Konjugation der einzelnen Elemente bedeutet. $B_I$ ist invariant unter dieser Aktion. Sei $B_I^{F_g}$ die Menge

der Punkte, die unter allen Elementen von $F_g$ invariant sind, d.h., die die zusätzlichen Gleichungen:

(iv) $\lambda_{\gamma\nu\gamma^{-1}} = \lambda_\nu \quad \forall \gamma \in F_g$

erfüllen.

Um eine Familie von Kurven über $\bar{S}_g$ konstruieren zu können, betrachtet man $I' = I \dot{\cup} \{m\}$ und $B_{I'}$. $F_g$ operiert auf $I'$ vermöge $\gamma(m) = m$. Somit operiert $F_g$ auch auf $B_{I'}$. Man hat eine natürliche Projektion $\pi : B_{I'} \to B_I$. Setze $B' = \pi^{-1}(B_I^{F_g})$. $F_g$ operiert dann auf den Fasern $B'_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in B_I^{F_g}$.

Für $\gamma \in I$ sei $B'_\gamma \subset B'$ die Menge gegeben durch die Gleichungen

$$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,m,\gamma} = 1 \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in I \setminus \{\gamma\}$$

$B'_b \cap B'_\gamma$ ist stets einpunktig, und man erhält einen bianalytischen Schnitt

$$\Phi_\gamma : B_I^{F_g} \to B'_\gamma \hookrightarrow B' \quad \text{von} \quad \pi$$

Für $\gamma' \in I, \gamma \in F_g$ ist $\Phi_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}} = \gamma \circ \Phi_{\gamma'}$ also insbesondere $\Phi_\gamma = \gamma \circ \Phi_\gamma$, d.h., $\Phi_\gamma(b)$ ist Fixpunkt von $\gamma$ für die Aktion von $F_g$ auf $B'_b$.
Es ist $B'_\gamma \cap B'_{\gamma'} = \emptyset$ für $\gamma \neq \gamma'$. $\bar{S}_g$ wird nun definiert als die Menge der Punkte in $B_I^{F_g}$, über denen die $F_g$-Aktion auf der Faser eine Schottky-Aktion ist.

**Def.7:**
a) $\bar{S}_g$ ist die Teilmenge der $b \in B_I^{F_g}$, für die gilt:

(i) $\Phi_\gamma(b)$ ist anziehender Fixpunkt von $\gamma$ für die Aktion von $F_g$ auf $B'_b$.

(ii) Für jede Komponente L von $B'_b$ ist die Isotropiegruppe $F_{g,L}$ eine gewöhnliche Schottkygruppe.

(iii) Für jede Komponente L von $B'_b$ sind die Schnittpunkte mit anderen Komponenten gewöhnliche Punkte für die Aktion von $F_{g,L}$.

b) Für jedes $b \in B_b'$ sei $\Omega_b$ das Komplement des Abschlusses der Menge $\{\Phi_\gamma(b) : \gamma \in I\}$, dann ist $\Omega_b$ eine offene $F_g$-invariante Teilmenge von $B_b'$.

$\bar{\Omega}_g \subset \pi^{-1}(\bar{S}_g)$ sei die Vereinigung aller $\Omega_b$ mit $b \in \bar{S}_g$.
Setze $\bar{C}_g = \bar{\Omega}_g / F_g$.

Es gilt der folgende Satz:

**Satz1:**
a) *$\bar{S}_g$ ist komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $3g-3$.*

b) *$\bar{C}_g \to \bar{S}_g$ ist eine flache Familie von stabilen* Riemannschen Flächen vom Geschlecht g.

c) *$\bar{\Omega}_g \to \bar{C}_g$ ist Schottky-Überlagerung mit Decktransformationsgruppe $F_g$.*

d) *$\bar{S}_g$ ist feiner Modulraum für stabile Riemannsche Flächen mit Schottky-Struktur. Die in b) und c) erklärten Abbildungen definieren die universelle Familie.*

**Bew.:**
a) [GH], Seite 208
b) [GH], Seite 197
c) [GH], Seite 197
d) [GH], Seite 199

**Bem.2:** Zuletzt muß noch begründet werden, warum die $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}$ die Doppelverhältnisse der Fixpunkte der $\gamma_i$ beschreiben. Sei also ein $b \in \bar{S}_g$ gegeben, so gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(b) &= \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(\Phi_{\gamma_4}(b)) \cdot \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,m,\gamma_4}(\Phi_{\gamma_4}(b)) \\ &= \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(\Phi_{\gamma_4}(b))\end{aligned}$$

nach Definition von $\Phi_{\gamma_4}$.

Die Koordinate $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(\Phi_{\gamma_4}(b))$ beschreibt im verallgemeinerten Sinne das Doppelverhältnis der vier Fixpunkte. Man rechnet leicht nach, daß:

$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(\Phi_{\gamma_1}(b)) = 0$
$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(\Phi_{\gamma_2}(b)) = \infty$
$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(\Phi_{\gamma_3}(b)) = 1$

Hieraus folgt, daß $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(B'_b) = P_1$ ist, d.h., es gibt eine Komponente L mit $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}(L) = P_1$. Da es nun immer eine aus endlich vielen Komponenten bestehende Teilmenge von $B'_b$, die L und eine beliebige andere Komponente enthält, gibt, lassen sich die Ergebnisse aus [GHP] anwenden und man erhält:

$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m} : L \to P_1$ ist ein Isomorphismus, und $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}$ ist auf jeder anderen Komponente konstant. Hieraus folgt, daß $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}$ auf den Zusammenhangskomponenten von $B'_b \setminus L$ konstant ist.

Sei $G_b$ der Schnittgraph von $B'_b$. $G_b$ ist eine Baum. Die drei Fixpunkte von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ liegen auf drei nicht notwendig verschiedenen Knoten von $G_b$. Da $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}$ auf diesen drei Punkten verschieden ist, muß die Komponente L, auf der $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}$ ein Isomorphismus ist, dadurch charakterisiert sein, daß die Wege in $G_b$ von den drei Knoten nach L sich nur in L schneiden. L heißt der Median der drei Knoten in $G_b$. Liegen zwei oder drei Fixpunkte auf einer Komponente (und damit auf L), so ist diese Komponente der Median. Für L schreibe man:

$$L = m(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = m_b(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = m(\Phi_{\gamma_1}(b), \Phi_{\gamma_2}(b), \Phi_{\gamma_3}(b)) \quad ,$$

wobei je nach Situation der Knoten des Graphen oder die Komponente der Faser gemeint ist. $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(b)$ errechnet sich also folgendermaßen: Betrachte die Komponente $L = m(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ in $B'_b$. $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}$ ist ein Isomorphismus von L nach $P_1$. Die Projektion der Fixpunkte $\Phi_{\gamma_i}(b)$ auf L, d.h., auf die Koordinate $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}$, ist der Punkt, in dem die Zusammenhangskomponente von $B'_b \setminus L$, die $\Phi_{\gamma_i}(b)$ enthält, L schneidet, da $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,m}$ auf den Zusammenhangskomponenten konstant ist, oder der Punkt selbst, falls er schon auf L liegt. Das verallgemeinerte Doppelverhältnis der vier Fixpunkt ist dann das Doppelverhältnis der Projektionen auf L und somit nach Konstruktion gleich der Koordinate $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}$. Dabei ist das Doppelverhältnis gleich 0 $(1, \infty)$, falls die Projektion des vierten Fixpunktes mit der Projektion des ersten (zweiten, dritten) Fixpunktes übereinstimmt.

## $\mathcal{C}$ $\mathbf{B}_n$

Als letztes soll noch auf die schon zitierte Arbeit [GHP] eingegangen werden, da die Varietäten $B_n$ die irreduziblen Komponenten des noch zu definierenden Teichmüllerraums sind. Die Konstruktion von $B_n$ ist analog zu der von $B_I$ , nur ist in diesem Fall $I = \{1, \ldots, n\}$. Man hat die Projektion $\pi : B_{n+1} \to B_n$, indem man auf die Koordinaten ohne $n+1$ projiziert. $B_n$ ist feiner Modulraum für stabile, n-markierte Bäume von projektiven Geraden. $\pi : B_{n+1} \to B_n$ ist die universelle Familie.

**Def.8:** Sei C eine zusammenhängende Varietät und $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ ein n-Tupel von paarweise verschiedenen Punkten auf C.
$(C, \phi)$ heißt *stabiler, n-markierter Baum von projektiven Geraden*, wenn gilt:

(i) Jede Komponente von C ist isomorph zu $P_1$.
(ii) Jeder singuläre Punkt ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt.
(iii) Der Schnittgraph von C ist ein Baum.
(iv) Die Menge $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \cup Sing(C)$ hat auf jeder Komponente von C mindestens drei Punkte.
(v) $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \cap Sing(C) = \emptyset$.

**Bem.3:** Man konstruiert n Schnitte $\varphi_n : B_n \to B_{n+1}$, die die n Marken definieren. Es gilt wieder $\lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(b)$ ist das Doppelverhältnis der Marken $\phi_{i_1}(b), \ldots, \phi_{i_4}(b)$ im vorher beschriebenen Sinn. Es gilt:

**Satz2:** *$B_n$ ist nichtsinguläre Varietät, birational zu $P_1^{n-3}$.*

**Bew.:** [GHP], Seite 148

**Bem.4:** Zu jedem Punkt $x \in B_n$ läßt sich auf folgende Weise ein abgeschlossenes Unterschema konstruieren:
Betrachte den n-markierten Baum über $x$. Sein Schnittgraph $G_x$ trägt eine durch die n Marken induzierte Markierung $\psi_x$ auf den Knoten

$$\psi_x : \{1, \ldots, n\} \to G_x^0$$

Man definiert nun:

$B(G_x, \psi_x) = \{x' \in B_n |$ Der Schnittgraph $G_{x'}$ kontrahiert auf $G_x$ und die aus $\psi_{x'}$ entstehende Markierung ist $\psi_x\}$

In Gleichungen kann man $B(G_x, \psi_x)$ schreiben als:

$B(G_x, \psi_x) = \{x' \in B_n | \lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x') = 0 \, \forall i_1, i_2, i_3, i_4$ mit $\lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x) = 0\}$

**Lemma3:** *$B(G_x, \psi_x)$ ist isomorph zu $\prod_{k \in G_x^0} B_{val(k)}$,*

*wobei $val(k) = \sharp(\psi_x^{-1}(k))$ + Valenz von $k$ in $G_x$.*

*Insbesondere ist $B(G_x, \psi_x)$ irreduzibel und glatt.*

**Bew.:** [GHP], Seite 138

## §2 $T_g^d$

Es soll nun der Teil von $\bar{S}_g$ betrachtet werden, über dem die Kurven in $\bar{C}_g$ total degeneriert sind, d.h., jede Komponente isomorph zu $P_1$ ist. Eine Schottky-Überlagerung einer solchen Kurve ist stets die universelle Überlagerung und die Schottkygruppe ist folglich die Fundamentalgruppe. Dieser Teil $T_g^d$ ist also der Teichmüllerraum für total degenerierte Kurven.
Ein Punkt in $\bar{S}_g$ gehört zu $T_g^d$, wenn die Isotropiegruppe jeder Komponente der zugehörigen Kurve in $\bar{\Omega}_g$ die triviale Gruppe ist, d.h., jedes Element $\gamma \in F_g$ hält keine Komponente fest. Das ist genau dann der Fall, wenn der *Multiplikator* $t_\gamma := \lambda_{\gamma,\gamma^{-1},\gamma',\gamma\gamma'\gamma^{-1}}$ gleich 0 ist. $T_g^d$ ist also gegeben durch die Gleichungen:

**Def.1:** $T_g^d = \{s \in \bar{S}_g | t_\gamma(s) = 0 \, \forall \gamma \in I\}$

Der Begriff Fixpunkt eines Elementes $\gamma \in F_g$ für die Aktion auf der Faser $\tilde{X}$ in $\bar{\Omega}_g$ ist über $T_g^d$ näher zu erklären. Betrachte den Schnittgraphen $\tilde{G}$ zu $\tilde{X}$. Da $\tilde{X}$ total degeneriert ist, operiert jedes Element $\gamma \in F_g$ fixpunktfrei. Das Element $\gamma$ hat in $\tilde{G}$ eine Achse, auf der die Operation von $\gamma$ durch Verschieben erfolgt. Der anziehende Fixpunkt liegt dann auf dem Ende der Achse, zu dem hin $\gamma$ schiebt. Ein solcher Punkt liegt in $B'$, da $B'$ kompakt ist, jedoch nach Konstruktion nicht in $\bar{\Omega}_g$. Zur Berechnung von Medianen und Doppelverhältnissen ist die Kenntnis der Achse von $\gamma$ stets ausreichend. Als erstes soll die Struktur von $T_g^d$ untersucht werden. Es stellt sich heraus, daß $T_g^d$ aus unendlich vielen irreduziblen Komponenten besteht. Jede ist isomorph zu $B_{2g}$. Die äußere Automorphismengruppe $OutF_g$ von $F_g$ operiert transitiv auf diesen Komponenten. Sei $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ eine Basis von $F_g$. Identifiziere im folgenden $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ mit $1, \ldots, g$ und $\gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_g^{-1}$ mit $-1, \ldots, -g$, so erhält man eine Projektion $\pi_\sigma$ von $T_g^d$ nach $B_{2g}$, indem man auf die Koordinaten projiziert, in denen nur Elemente von $\sigma$ vorkommen. Als erstes wird ein Schnitt $f_\sigma$ für $\pi_\sigma$ konstruiert, dessen Bild eine irreduzible Komponente von $T_g^d$ ist. $T_g^d$ wird von diesen Schnitten überdeckt. Zur Definition von $f_\sigma$ benötigt man ein technisches Lemma:

**Lemma1:** *Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F_g$ primitive Elemente und $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ eine Basis von $F_g$. $st(\alpha) = st_\sigma(\alpha)$ bezeichne das Basiselement (oder ein*

*Inverses), mit dem die Darstellung von $\alpha$ in $\sigma$ beginnt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mu = \mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mu_\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit*

$$\sharp\{st(\mu\alpha_1\mu^{-1}), st(\mu\alpha_2\mu^{-1}), st(\mu\alpha_3\mu^{-1})\} = 3$$

**Bew.:** Der Beweis ist möglich allein durch Rechnen in $F_g$, siehe [P]. Ich möchte hier einen geometrische Beweis bringen, ohne zu sehr in technische Details zu gehen:
Betrachte den Graphen $G_0$ mit einem Knoten und g Schleifen. Die Fundamentalgruppe dieses Graphen ist isomorph zu $F_g$. Die Wege durch die Schleifen mögen die Basis $\sigma$ von $F_g$ induzieren. Betrachte die universelle Überlagerung $\tilde{G}_0$ von $G_0$. $\tilde{G}_0$ ist ein 2g-regulärer, unendlicher Baum, und $F_g$ operiert transitiv auf den Knoten. Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gegeben, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mu \in F_g$ mit $\mu(m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = P_0$ für einen beliebigen Knoten $P_0$ aus $\tilde{G}_0$. Wähle $P_0 = m(\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \gamma_2)$. Man sieht leicht (vergleiche Folgerung aus Satz 2.1), daß

$$m(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = P_0 \Leftrightarrow \sharp\{st(\nu_1), st(\nu_2), st(\nu_3)\} = 3$$

Aus $\mu(m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = m(\mu\alpha_1\mu^{-1}, \mu\alpha_2\mu^{-1}, \mu\alpha_3\mu^{-1})$ folgt die Behauptung.

$f_\sigma$ läßt sich nun definieren als:

**Def.2:** Sei $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ Basis von $F_g$ und $p \in B_{2g}$, dann sei $f_\sigma(p) := (\alpha_{\nu_1,\ldots,\nu_4})$, wobei:
$\mu := \mu_\sigma(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad i_k := st_\sigma(\mu\nu_k\mu^{-1}) \quad (i_k \in \{-g, \ldots, -1, 1, \ldots, g\})$

$$\alpha_{\nu_1,\ldots,\nu_4} = \begin{cases} \lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(p) & , \text{falls} \quad \sharp\{i_1, \ldots, i_4\} = 4 \\ 0 & , \text{falls} \quad i_1 = i_4 \\ \infty & , \text{falls} \quad i_2 = i_4 \\ 1 & , \text{falls} \quad i_3 = i_4 \end{cases}$$

Falls $f_\sigma(B_{2g}) \subset T_g^d$, so ist $f_\sigma$ ein Schnitt für $\pi_\sigma$ nach Konstruktion.

**Lemma2:** $f_\sigma(B_{2g}) \subset T_g^d$

**Bew.:** Zuerst ist zu zeigen, daß $f_\sigma(p) \in B_I^{F_g}$. Die $F_g$-Invarianz ist klar nach Konstruktion, es bleiben die Doppelverhältnisgleichungen zu zeigen:

(i) $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} = (\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4,\gamma_3})^{-1}$
(ii) $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} = 1 - \lambda_{\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_1}$

Sei $\mu = \mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$. Falls $\mu = \mu(\nu_1,\nu_2,\nu_4)$ ist, sind die Gleichungen erfüllt, weil sie in $B_{2g}$ gelten. Sei jetzt $st(\mu\nu_1\mu^{-1}) = st(\mu\nu_4\mu^{-1})$ (Die restlichen Fälle sind analog).

$\Rightarrow \lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}(f_\sigma(p)) = 0$

Sei $\mu' = \mu'(\nu_1,\nu_2,\nu_4)$, so folgt aus der Eindeutigkeit von $\mu$ und $\mu'$, daß

$$\begin{aligned} st(\mu'\nu_2\mu'^{-1}) &= st(\mu'\nu_3\mu'^{-1}) \\ \Rightarrow\ \lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_3}(f_\sigma(p)) &= \infty \end{aligned}$$

Analog folgt $\lambda_{\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_1}(f_\sigma(p)) = 1$. Etwas mehr Schwierigkeiten bereitet die Gleichung:

(iii) $\lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \cdot \lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_5} = \lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_5}$

Falls $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \mu(\nu_1,\nu_2,\nu_4)$ ist, folgt die Gleichung aus der entsprechenden Gleichung in $B_{2g}$.
Sei also nach Konjugation der ganzen Gleichung Œ:

$\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = id$, $st(\nu_1) = st(\nu_4)$ (Rest analog), $\mu' = \mu(\nu_1,\nu_2,\nu_4)$
und $x = \lambda_{st(\mu'\nu_1\mu'^{-1}),st(\mu'\nu_2\mu'^{-1}),st(\mu'\nu_4\mu'^{-1}),st(\mu'\nu_5\mu'^{-1})}(p)$

Die Gleichung lautet dann:

$\lambda_{st(\nu_1),st(\nu_2),st(\nu_3),st(\nu_5)}(p) = 0 \cdot x$, da $\lambda_{st(\nu_1),st(\nu_2),st(\nu_3),st(\nu_4)}(p) = 0$

Für $x = \infty$ ist diese Gleichung homogen geschrieben stets wahr, sei also $x \neq \infty$. Es ist zu zeigen, daß $\lambda_{st(\nu_1),st(\nu_2),st(\nu_3),st(\nu_5)}(p) = 0$. Dies gilt, falls $st(\nu_1) = st(\nu_5)$ ist. Aus $x \neq \infty$ folgt:

$st(\mu'\nu_2\mu'^{-1}) \neq st(\mu'\nu_5\mu'^{-1}) \Rightarrow st(\nu_2) = st(\mu'^{-1})$ oder $st(\nu_5) = st(\mu'^{-1})$

Nach Definition von $\mu'$ ist:

$st(\mu'\nu_1\mu'^{-1}) \neq st(\mu'\nu_4\mu'^{-1}) \Rightarrow st(\nu_1) = st(\mu'^{-1})$ oder $st(\nu_4) = st(\mu'^{-1})$

Da $st(\nu_1) = st(\nu_4)$ folgt, daß $st(\nu_1) = st(\mu'^{-1})$, also ist $st(\nu_2) \neq st(\mu'^{-1})$ nach Definition von $\mu'$. Folglich ist $st(\nu_5)$ auch gleich $st(\mu'^{-1})$.

Es bleibt zu zeigen, daß alle Multiplikatoren 0 sind. Da dann auch alle Isotropiegruppen trivial sind, sind die Bedingungen für $\bar{S}_g$ trivialerweise erfüllt. Seien $\gamma, \gamma'$ gegeben und $\mu = \mu(\gamma, \gamma^{-1}, \gamma')$, dann ist:

$$\lambda_{\gamma,\gamma^{-1},\gamma',\gamma\gamma'\gamma^{-1}}(f_\sigma(p)) =$$
$$\lambda_{st(\mu\gamma\mu^{-1}),st(\mu\gamma^{-1}\mu^{-1}),st(\mu\gamma'\mu^{-1}),st((\mu\gamma\mu^{-1})\cdot(\mu\gamma'\mu^{-1})(\mu\gamma^{-1}\mu^{-1}))}(f_\sigma(p))$$

Nach Definition von $\mu$ ist das Produkt $(\mu\gamma\mu^{-1}) \cdot (\mu\gamma'\mu^{-1})$ gekürzt, folglich ist:

$$st((\mu\gamma\mu^{-1}) \cdot (\mu\gamma'\mu^{-1})(\mu\gamma^{-1}\mu^{-1})) = st(\mu\gamma\mu^{-1}) \Rightarrow t_\gamma = 0,$$

nach Definition von $f_\sigma$.

**Bem.1:** Sei $T_\sigma = f_\sigma(B_{2g})$. Zuerst ist zu untersuchen, wann $T_\sigma = T_{\sigma'}$ und ob $\bigcup_\sigma T_\sigma = T_g^d$. Nach Definition ist $T_\sigma = T_{\gamma\sigma\gamma^{-1}}$, d.h., man kann sich auf Elemente aus $Out\ F_g$ beschränken. Außerdem ist $T_\sigma = T_{\sigma'}$, wenn $\sigma$ aus $\sigma'$ durch Vertauschen der Indizes oder durch Inversenbildung der Basiselemente entsteht, da sich dann $f_\sigma$ von $f_{\sigma'}$ nur um einen Automorphismus von $B_{2g}$ unterscheidet. Umgekehrt gilt:

**Lemma3:** *$T_\sigma = T_{\sigma'}$, genau dann, wenn $\sigma'$ aus $\sigma$ wie oben beschrieben hervorgeht.*

**Bew.:** Sei $\sigma' = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$. Für $\delta_i^{-1}$ schreibe im weiteren auch $\delta_{-i}$. Setze

$$K = \{st_\sigma(\delta_i) | i = -g, \ldots, -1, 1, \ldots, g\}$$

Sei durch Konjugation von $\sigma'$ mit einem geeigneten $\mu$ wie in Lemma1 Œ $\sharp K \geq 3$. Angenommen es ist $\sharp K < 2g$, so gibt es $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}$ mit $st_\sigma(\delta_{i_1}) = st_\sigma(\delta_{i_2}) = \gamma_i$. Zur Vereinfachung sei $i_1 = 1, i_2 = 2, i = 1$. Wähle ein $\delta_{i_3}$ mit $st_\sigma(\delta_{i_3}) = \gamma_j \neq \gamma_1$. Zur Vereinfachung wieder $i_3 = 3$. Sei $\mu = \mu_\sigma(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Da $\sharp\{st(\mu\delta_1\mu^{-1}), st(\mu\delta_2\mu^{-1}), st(\mu\delta_3\mu^{-1})\} = 3$ ist, ist

$$st(\mu^{-1}) = st(\delta_1) = \gamma_1 \Rightarrow st(\mu\delta_3\mu^{-1}) = st(\mu)$$

Da $T_\sigma = T_{\sigma'}$, ist $\lambda_{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_i}$ nicht konstant auf $T_\sigma$. Es ist aber

$$\lambda_{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_i} = \lambda_{st(\mu\delta_1\mu^{-1}),st(\mu\delta_2\mu^{-1}),st(\mu\delta_3\mu^{-1}),st((\mu\delta_i\mu^{-1}))},$$

also ist $st(\mu\delta_i\mu^{-1}) \neq st(\mu\delta_3\mu^{-1}) = st(\mu) \Rightarrow st(\delta_i) = st(\mu^{-1})$

Es würde folgen, daß $\sharp K = 2$, also gilt $\sharp K = 2g$.
Da $\sigma, \sigma'$ Basen von $F_g$ sind, ist dies nur möglich, wenn die Darstellung der einen Basiselemente in der anderen Basis die Länge eins hat, also wie oben beschrieben ist, denn sonst gilt:

Sei $\gamma_1 = \prod_{i=1}^{n} \delta_{j_i}$, so kann man für die $\delta_{j_i}$ die Darstellung in $\sigma$ einsetzen, die aber, da $\sharp K = 2g$ ist, gekürzt ist. Also muß $n = 1$ und damit $\gamma_1 = \delta_{j_1}$ sein. Es folgt die Behauptung.

**Bem.2:** Es bleibt nun die schwierigere Aufgabe zu zeigen, daß $T_g^d$ von den $T_\sigma$ überdeckt wird. Da die $T_\sigma$ als Bilder von kompakten Mengen abgeschlossen in der Zariski-Topologie sind, folgt, daß die $T_\sigma$ die irreduziblen Komponenten von $T_g^d$ sind. Um dies nun zu zeigen benutzt man den Begriff der geometrischen Basis von $F_g$. $T_\sigma$ ist die Menge der Punkte in $T_g^d$, in denen $\sigma$ geometrische Basis ist. Da jede Kurve eine geometrische Basis zuläßt, folgt, daß $\bigcup_\sigma T_\sigma = T_g^d$. Zunächst soll also der Begriff der geometrischen Basis erläutert werden. Vergleiche hierzu [S], §3 + §5.

**Def.3:** Sei $G$ ein stabiler Graph vom Geschlecht g, d.h., Schnittgraph einer stabilen, total degenerierten Kurve vom Geschlecht g. Ein *Gerüst* von $G$ ist ein maximaler, zusammenhängender Teilbaum von $G$. Sei ein Gerüst $K$ gegeben. Die Fundamentalgruppe von $G$ ist $F_g$. Durch $K$ ist eine Basis folgendermaßen ausgezeichnet: Es gibt genau g Kanten von $G$, die nicht in $K$ liegen. Wähle einen Aufpunkt $p_0 \in G$, so gibt es genau einen geschlossenen Weg $w$ (eindeutig bis auf $w^{-1}$), der genau eine der freien Kanten einmal durchläuft und sonst ganz in $K$ liegt. Die so definierten Wege bilden eine Basis von $F_g$, die bis auf Reihenfolge der Elemente und Inversenbildung durch $K$ eindeutig bestimmt ist. Eine Basis, die so entsteht, heißt *geometrische Basis*. Sie ist auch folgendermaßen charakterisiert: Sei $G_0$ der Graph

mit einem Knoten und g Schleifen. Die Kontraktion von $K$ induziert einen Isomorphismus $\pi_1(g) \to \pi_1(G_0)$. Eine geometrische Basis wird abgebildet auf die Wege, die durch die g Kanten verlaufen.

**Bem.3:** Der Begriff der geometrischen Basis muß noch mehr an die Situation von Schnittgraphen angepaßt werden. Sei also $G$ der Schnittgraph einer Kurve X, $K$ ein Gerüst von $G$ und $\sigma$ die durch $K$ induzierte geometrische Basis von $F_g \cong \pi_1(G)$. Betrachte die universelle Überlagerung $\tilde{G}$ von $G$, und lifte $K$ zu einem zusammenhängenden Teilbaum $\tilde{K}$ von $\tilde{G}$. $\sigma$ induziert eine Basis von $Deck(\tilde{G}|G)$. $\tilde{K}$ ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von $F_g$ auf den Knoten von $\tilde{G}$ (nicht für die Kanten). Sei $l$ eine Kante in $G \setminus K$. Sei $p$ der Endpunkt von $l$, den der durch $l$ induzierte Weg $w_l$ in $\sigma$ zuerst duchläuft. $l$ läßt sich eindeutig zu einer Kante $\tilde{l}$ liften, so daß $\tilde{p}$ in $\tilde{K}$ liegt. Der andere Endpunkt von $\tilde{l}$ sei $q$. $q$ liegt nicht in $\tilde{K}$. Das Element in $F_g$, welches $q$ nach $\tilde{K}$ abbildet, entspricht dem Element $w_l^{-1}$ in $\pi_1(G)$. Betrachte jetzt $Deck(\tilde{X}|X)$, so ist diese Gruppe kanonisch isomorph zu $Deck(\tilde{G}|G)$, und die geometrische Basis muß auch hier zu finden sein. Die in $\tilde{K}$ liegenden Knoten entsprechen Komponenten von $\tilde{X}$. Sei $\tilde{F}$ die Vereinigung dieser Komponenten, so ist $\tilde{F}$ schon fast ein Fundamentalbereich für $Deck(\tilde{X}|X)$. Betrachte alle Komponenten, die $\tilde{F}$ schneiden. Diese entsprechen den Knoten $q$ aus $\tilde{G}$. Die geometrische Basis von $Deck(\tilde{X}|X)$ bildet diese Komponenten nach $\tilde{F}$ ab. Sei $L$ eine solche Komponente und $\gamma$ das Element, welches $L$ nach $\tilde{F}$ abbbildet. Sei $M$ die Komponente von $\tilde{F}$, die $L$ schneidet, so wird $M$ unter $\gamma$ auf eine Komponente abgebildet, die nicht in $\tilde{F}$ liegt, $\tilde{F}$ aber schneidet. Die Komponenten, die $\tilde{F}$ schneiden, lassen sich also in g Paare $(L_i, L_{-i})$ aufteilen, so daß für die geometrische Basis $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ gilt:

$$\gamma_i(L_{-i}) \subset \tilde{F}, \gamma_i^{-1}(L_i) \subset \tilde{F}$$

$\tilde{F}$ ist also ein Fundamentalbereich in dem schwachen Sinne, daß noch $L_{-i} \cap \tilde{F}$ und $L_i \cap \tilde{F}$ vermöge $\gamma_i$ äquivalent sind. Wann immer also eine solche Situation für eine Basis $\sigma$ von $Deck(\tilde{X}|X)$ vorliegt, ist $\sigma$ geometrische Basis von $Deck(\tilde{X}|X)$. Aus folgendem Satz folgt dann die Behauptung über $T_g^d$:

**Satz1:** *Genau über $T_\sigma$ ist $\sigma$ eine geometrische Basis von $F_g$ für die Aktion von $F_g$ auf der Faser in $\bar{\Omega}_g$.*

**Folg.1:** $T_g^d = \bigcup_\sigma T_\sigma$

**Folg.2:** $T_\sigma \cap T_{\sigma'} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ *Es gibt einen Graphen $G$ und Gerüste $K$, $K'$ von $G$, die $\sigma$ bzw. $\sigma'$ induzieren.*

**Folg.3:** *Da jeder Graph nur endlich viele Gerüste haben kann und es nur endlich viele stabile Graphen vom Geschlecht $g$ gibt, ist die Anzahl der $T_{\sigma'}$, die ein festes $T_\sigma$ schneiden, endlich.*

**Bew.:** (Von Satz 1) Nach Definition ist:

$$T_\sigma = \{\lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} = \lambda_{st(\mu\nu_1\mu^{-1}),\ldots,st(\mu\nu_4\mu^{-1})} | (\nu_1,\ldots,\nu_4) \in V\}$$

Für $s \in T_g^d$ ist also zu zeigen

$\lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}(s) = \lambda_{st(\mu\nu_1\mu^{-1}),\ldots,st(\mu\nu_4\mu^{-1})}(s)\ \forall (\nu_1,\ldots,\nu_4) \in V \Leftrightarrow$
$\sigma$ ist geometrische Basis für die Aktion von $F_g$ auf der Faser über $s$.

„⇒": Sei $\tilde{F}$ wie in Bemerkung 3 die Liftung eines Gerüstes, welches $\sigma$ induziert. $\overline{\tilde{X} \setminus \tilde{F}}$ zerfällt in Zusammenhangskomponenten $F_i$ $(i = -g.\ldots,g)$, wobei $L_i \subset F_i$, es gilt nach Konstruktion:

**Beh.1:** $Fixpunkt(\gamma_i) \in F_i$

**Folg.:** $m(\gamma_i,\gamma_j,\gamma_k) \subset \tilde{F}$

Es soll nun der Median beliebiger Elemente berechnet werden:

**Beh.2:** Sei $\gamma \in I$, $st(\gamma) = \gamma_i$, so ist $Fixpunkt(\gamma) \in F_i$.

**Folg.:** Sind $st(\gamma), st(\gamma'), st(\gamma'')$ paarweise verschieden, so ist $m(\gamma,\gamma',\gamma'') = m(st(\gamma), st(\gamma'), st(\gamma''))$, insbesondere hängt die Projektion des Fixpunkte von $\gamma$ auf eine Komponente von $\tilde{F}$ nur von $st(\gamma)$ ab.

**Bew.2:** Die Behauptung folgt aus folgender Aussage:

**Beh.:** Die Komponente $F_i$, in der der anziehende Fixpunkt von $\gamma$ liegt, ist dadurch charakterisiert, daß es ein $k_0$ gibt mit:

$$\gamma(F_j) \subset F_i \ \forall j \neq k_0$$

Es gilt dann mit Induktion über die Länge $l$ der Darstellung von $\gamma$ in $\sigma$:

Für $l = 1$ folgt Behauptung 2 aus Behauptung 1, sei also $l(\gamma) > 1$:

Sei $\text{Œ}\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma'$ gekürzt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $Fixpunkt(\gamma') \in F_i$, wenn $st(\gamma') = \gamma_i$, d.h., es gibt ein $k_0$ mit:

$$\gamma'(F_j) \subset F_i \ \forall j \neq k_0$$

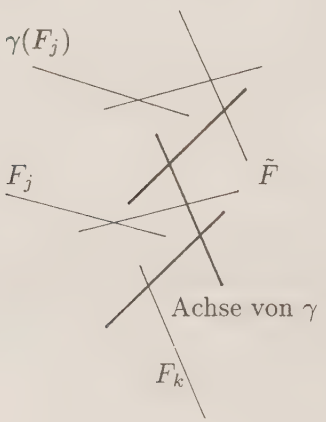
Da $\gamma_1(F_j) \subset F_1$ ist ($l = 1$) folgt, daß:

$$\gamma(F_j) \subset F_1 \ \forall j \neq k_0$$

**Bem.:** Es folgt, daß $st(\gamma^{-1}) = \gamma_{-k_0}$ ist.

**Bew.:** (Der Behauptung) Der Fixpunkt von $\gamma$ liege in $F_i$, der Fixpunkt von $\gamma^{-1}$ liege in $F_k$ (nicht notwendig $i \neq k$). Die Achse von $\gamma$ verläuft dann von $F_k$ nach $F_i$ (oder sie liegt ganz in $F_i$ wenn $i = k$). Da $\gamma$ auf der Achse schiebt, werden alle $F_j$ mit $j \neq k$ nach $F_i$ geschoben.

Bild:



Für $i = k$ ist die Situation ähnlich.

Nun zum Beweis der einen Richtung:
Sei $\sigma$ geometrische Basis in $s$; $\nu_1, \ldots, \nu_4$ gegeben und $\mu = \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, dann ist:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}(s) &= \lambda_{\mu\nu_1\mu^{-1},\ldots,\mu\nu_4\mu^{-1}}(s) && \text{Gleich. (iv)}\\
&= DV_s(Fix(\mu\nu_1\mu^{-1}), \ldots, Fix(\mu\nu_4\mu^{-1})) && \text{Bem.1.2}\\
&= DV_s(Fix(st(\mu\nu_1\mu^{-1})), \ldots, Fix(st(\mu\nu_4\mu^{-1}))) && \text{Folg. Beh.2}\\
&= \lambda_{st(\mu\nu_1\mu^{-1}),\ldots,st(\mu\nu_4\mu^{-1})}(s) && \text{Bem.1.2}
\end{aligned}$$

„⇐": Zum Beweis dieser Richtung kehrt man die Konstruktion um. Sei $s \in T_g^d$, $\tilde{X} = \pi^{-1}(s) \subset \bar{\Omega}_g$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_g)$ eine Basis von $F_g$, so setze

$$\tilde{F}_\sigma = \bigcup_{i,j,k \in \{-g,\ldots,-1,1,\ldots,g\}} m(\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k) \subset \tilde{X}$$

Falls die Behauptung richtig ist, muß gelten, daß $\tilde{F}_\sigma$ von der Liftung eines Gerüstes herkommt und dieses Gerüst $\sigma$ als geometrische Basis induziert. $\tilde{F}_\sigma$ muß also die Bedingungen aus Bemerkung 3 erfüllen.

**Beh.3:** $\tilde{F}_\sigma$ ist Fundamentalbereich für die Aktion von $F_g$ auf den Komponenten von $\tilde{X}$.

**Bew.3:**

a) Sei $L$ eine beliebige Komponente von $\tilde{X}$. Da $\tilde{X}$ stabil, gibt es $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in F_g$ mit $m(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = L$. Sei $\mu = \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(L) &= \mu(m(\nu_1, \nu_2, \nu_3))\\
&= m(\mu\nu_1\mu^{-1}, \mu\nu_2\mu^{-1}, \mu\nu_3\mu^{-1})\\
&= m(st(\mu\nu_1\mu^{-1}), st(\mu\nu_2\mu^{-1}), st(\mu\nu_3\mu^{-1})) \subset \tilde{F}_\sigma\,,
\end{aligned}$$

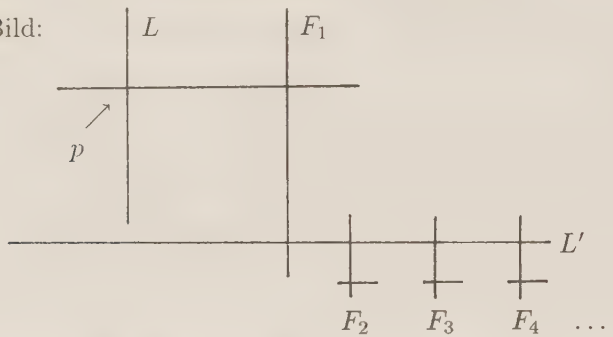
denn falls $\sharp\{st(\nu_1), st(\nu_2), st(\nu_3)\} = 3$ ist, ist

$$L = m(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = m(st(\nu_1), st(\nu_2), st(\nu_3)) = L'$$

Begr.: Angenommen $L \neq L'$. $\tilde{X} \setminus L'$ zerfällt in Zusammenhangskomponenten $F_i$, und es sei $L \subset F_1$. Da $L = m(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ ist, sind die

Projektionen der Fixpunkte von $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ auf $L$ verschieden, d.h., zwei der drei Fixpunkte liegen in $F_1$, denn:

Bild:




Die Projektion auf $L$ von Fixpunkten, die in den Komponenten $F_2, F_3, \ldots$ liegen, ist stets $p$.
Seien also Œ die Fixpunkte von $\nu_1$ und $\nu_2$ in $F_1$. Die Projektion auf $L'$ ist dann gleich, und es folgt (Bem.1.2):

$$\lambda_{st(\nu_1),st(\nu_2),st(\nu_3),\nu_1}(s) = \lambda_{st(\nu_1),st(\nu_2),st(\nu_3),\nu_2}(s)$$

Nach Voraussetzung gilt aber, daß der linke Wert 0 und der rechte Wert $\infty$ ist.

b) Seien $L, L' \subset \tilde{F}_\sigma$ und $\mu(L) = L'$. Zu zeigen ist dann, daß $\mu = id$. Sei also $\mu \neq id$, $L = m(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \gamma_{i_3})$, $L' = m(\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \gamma_{j_3})$.

$$\Rightarrow \mu(L) = m(\mu\gamma_{i_1}\mu^{-1}, \mu\gamma_{i_2}\mu^{-1}, \mu\gamma_{i_3}\mu^{-1}) = m(\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \gamma_{j_3})$$

$$\Rightarrow \lambda_{\mu\gamma_{i_1}\mu^{-1},\mu\gamma_{i_2}\mu^{-1},\mu\gamma_{i_3}\mu^{-1},\nu}(s) = \lambda_{\gamma_{j_1},\gamma_{j_2},\gamma_{j_3},\nu}(s)\ \forall \nu \in I$$

$$\Rightarrow \lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},\mu^{-1}\nu\mu}(s) = \lambda_{\gamma_{j_1},\gamma_{j_2},\gamma_{j_3},\nu}(s)\ \forall \nu \in I$$

Setze nun $\nu = \gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \gamma_{j_3}$, so ist für höchstens ein $\gamma_{j_k}$ $st(\mu^{-1}\nu\mu) \neq st(\mu^{-1})$, d.h., die linke Seite nimmt nach Voraussetzng höchstens zwei verschiedene Werte an, die rechte Seite aber wird $0, 1, \infty$.

Es folgt Behauptung 3. Betrachte nun

$$\bar{L} = \{L_i \subset \tilde{X} \text{ Komponente} | L_i \cap \tilde{F}_\sigma \neq \emptyset,\ L_i \not\subset \tilde{F}_\sigma\}$$

Zu zeigen ist, daß $\bar{L} = \{L_{-g}, \ldots, L_{-1}, L_1, \ldots, L_g\}$ und $\gamma_i(L_{-i}) \subset \tilde{F}_\sigma$.

**Beh.4:** $\tilde{F}_\sigma$ ist zusammenhängend und

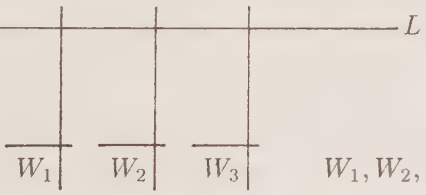
$$\tilde{X} \setminus \tilde{F}_\sigma = \bigcup_{i=-g,\ldots,-1,1,\ldots,g} F_i$$

so nummeriert, daß der Fixpunkt von $\gamma_i$ in $F_i$ liegt. $F_i$ die Zusammenhangskomponenten .

**Bew.4:** Sei $\tilde{X} \setminus \tilde{F}_\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Es ist $n \geq 2g$, denn sonst lägen in einem $F_i$ Fixpunkte von zwei Basiselementen, z.B. von $\gamma_1$ und $\gamma_2$. Dann ist $m(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_j) \subset F_i$, also nicht in $\tilde{F}_\sigma$. Da $\tilde{F}_\sigma$ Fundamentalbereich ist, ist es die Vereinigung der Liftungen aller Komponenten von $\tilde{X}/F_g$, nur ist $\tilde{F}_\sigma$ nicht notwendig zusammenhängend. Man sieht leicht, daß $\tilde{F}_\sigma$ zusammenhängend ist, genau dann, wenn $n = 2g$.

a) $F$ sei eine Zusammenhangskomponente aus endlich vielen Komponenten. Sei $L \subset F$ eine Komponente.

Bild:




Solche $W_i$ müssen existieren, da jede Zusammenhangskomponente von $\tilde{X} \setminus L$ aus unendlich vielen Komponenten besteht. $W_1, W_2, W_3$ sind Mediane von Fixpunkten von Basiselementen. Je zwei dieser drei Fixpunkte können nicht in der Zusammenhangskomponente von $\tilde{X} \setminus W_i$, in der $L$ liegt, liegen. Wähle jeweils einen dieser beiden aus, so ist der Median dieser drei Basiselemente gleich $L$, da die Projektionen der Fixpunkte auf $L$ verschieden sind. $L$ liegt also schon in $\tilde{F}_\sigma$.

b) Sei $F$ eine Zusammenhangskomponente aus unendlich vielen Komponenten, und in $F$ liege kein Fixpunkt eines Basiselementes. Sei $w \in I$ so gewählt, daß der Fixpunkt von $w$ in $F$ liegt. Dies ist immer möglich, da man ansonsten Komponenten aus $F$ nicht als Median schreiben könnte

(vgl. Beweis 3a). Sei Œ $w = \gamma_1 \cdot w'$ gekürzt. Sei $M = m(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \gamma_{i_3}) \subset \tilde{F}_\sigma$ die Komponente in $\tilde{F}_\sigma$, für die $F \cap M \neq \emptyset$. Es ist

$$\lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},w}(s) = \lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},\gamma_1}(s)$$

d.h., die Projektion des Fixpunktes von $\gamma_1$ und des Fixpunktes von $w$ auf $M$ sind gleich. Das kann aber nur sein, wenn der Fixpunkt von $\gamma_1$ in $F$ liegt.

Damit ist Behauptung 4 bewiesen. In jeder Zusammenhangskomponente liegt genau ein $L_i \in \bar{L}$. Die Nummerierung sei so gewählt, daß $L_i \subset F_i$ und der Fixpunkt von $\gamma_i$ in $F_i$ liegt. Zu zeigen ist noch:

**Beh.5:** $\gamma_{-i}(L_i) \subset \tilde{F}_\sigma$

**Bew.5:** Da der Fixpunkt von $\gamma_i$ in $F_i$ und der Fixpunkt von $\gamma_i^{-1}$ in $F_{-i}$ liegt, verläuft die Achse von $\gamma_i$, die die beiden Fixpunkte verbindet, durch $L_i$, d.h., $L_i$ liegt auf der Achse von $\gamma_i$. Da $\tilde{F}_\sigma$ Fundamentalbereich ist, gibt es ein $\gamma$ mit $M = \gamma(L_i) \subset \tilde{F}_\sigma$. Der Weg von $M$ nach $L_i$ enthält ein Stück der Achse von $\gamma$ und die Verschiebungslänge von $\gamma$ auf der Achse ist gleich der Länge dieses Stückes. Da $M \subset \tilde{F}_\sigma$ und $L_i \cap \tilde{F}_\sigma \neq \emptyset$ ist, liegt der Weg ganz in $\tilde{F}_\sigma$. Da Komponenten in $\tilde{F}_\sigma$ zueinander nicht äquivalent sind, muß die Achse von $\gamma$ gleich diesem Weg sein, d.h., $M$ und $L_i$ liegen auf der Achse. Es folgt, daß der Fixpunkt von $\gamma^{-1}$ in $F_i$ liegt. Wie in Beweis 4 folgt, daß $st(\gamma^{-1}) = \gamma_i$ ist. Sei also $\gamma = \gamma' \cdot \gamma_i^{-n}$, $n \geq 1$, $st(\gamma'^{-1}) = \gamma_j \neq \gamma_i, \gamma_{-i}$. Wie man leicht sieht (vgl. Beweis 2), ist dann $\gamma'^{-1}(M) \subset F_j$ und $\gamma_i^n(F_j) \subset F_i$, aber $\gamma_i^n(F_j) \cap \tilde{F}_\sigma = \emptyset$, da $F_j \cap F_i = \emptyset$. Es folgt, daß $\gamma' = id$, d.h., $\gamma_i^{-n}(L_i) = M$. Da $L_i$ auf der Achse von $\gamma_i$ liegt und die Komponenten in $\tilde{F}_\sigma$ nicht äquivalent sind, ist dies nur möglich, wenn $n = 1$ ist, d.h., $\gamma = \gamma_i^{-1}$, also $\gamma_i^{-1}(L_i) \subset \tilde{F}_\sigma$, wie gefordert.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

**Folg.:** (Aus dem Beweis) *Sei $\sigma$ geometrische Basis, so gilt mit den Bezeichnungen des Beweises:*

$m(\gamma, \gamma', \gamma'') \subset \tilde{F}_\sigma \Leftrightarrow \sharp\{st(\gamma), st(\gamma'), st(\gamma'')\} = 3$

**Bem.4:** Mit Hilfe von Satz 1 hat man nun die Möglichkeit, explizit zu berechnen, welche Komponenten $T_{\sigma'}$ ein festes $T_\sigma$ schneiden. Für g=2,3 wird dies in §5 ausgeführt. Zunächst soll untersucht werden, welchen Durchschnitt zwei Komponenten haben.

## §3 Der Durchschnitt zweier Komponenten

Ziel dieses Paragraphen ist es zu beweisen, daß $T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ von der Form $B(T, \psi)$, wie in Bemerkung 1.4 definiert, ist. Insbesondere ist also $T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ einfach zusammenhängend. Das gibt die Möglichkeit, den einfachen Zusammenhang von $T_g^d$ zu beweisen. Sei also $T_\sigma \cap T_{\sigma'} \neq \emptyset$, $x \in T_\sigma \cap T_{\sigma'}$, $\tilde{G}_x$ der Schnittgraph der Faser $\tilde{X}$ in $\bar{\Omega}_g$ über $x$. $\sigma$ und $\sigma'$ sind geometrische Basen für die Aktion von $F_g$ auf $\tilde{G}_x$.

**Def.1:** Sei $F_\sigma(p) = x$, so setze:

$$B_{\sigma,x} = \{p' \in B_{2g} | \lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(p') = 0 \, \forall i_1, i_2, i_3, i_4 \text{ mit } \lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(p) = 0\}$$
$$B^*_{\sigma,x} = \{p' \in B_{\sigma,x} | \lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(p') \neq 0 \, \forall i_1, i_2, i_3, i_4 \text{ mit } \lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}(p) \neq 0\}$$
$$T_{\sigma,x} = f_\sigma(B_{\sigma,x})$$
$$T^*_{\sigma,x} = f_\sigma(B^*_{\sigma,x})$$

**Lemma1:**

(i) *$B^*_{\sigma,x}$ ist offen und dicht in $B_{\sigma,x}$.*

(ii) *Für $x' \in T^*_{\sigma,x}$ ist $\tilde{G}_{x'} \cong \tilde{G}_x$, und die Aktion von $F_g$ ist verträglich mit dem Isomorphismus.*

**Bew.:**

(i) $B_{\sigma,x}$ ist nach Definition gleich $B(T_p, \psi_p)$, also glatt nach Lemma 1.3. $B^*_{\sigma,x}$ ist durch Ungleichungen gegeben, also offen und dicht, da $p \in B^*_{\sigma,x}$.

(ii) Sei $L$ Knoten von $\tilde{G}_x$. $L = m_x(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, setze $\alpha(L) = m_{x'}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, so definiert $\alpha$ eine Abbildung auf den Knoten von $\tilde{G}_x$ nach $\tilde{G}_{x'}$. Da $\tilde{G}_x$ und $\tilde{G}_{x'}$ Bäume sind, induziert $\alpha$ einen Isomorphismus der Graphen, wenn $\alpha$ ein Isomorphismus auf den Knoten ist und benachbarte Knoten auf benachbarte Knoten abbildet. Zum Beweis von (ii) ist also zu zeigen:

(1) $\alpha$ ist wohldefiniert, d.h., falls $L = m_x(\nu_1', \nu_2', \nu_3')$, ist

$$m_{x'}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = m_{x'}(\nu_1', \nu_2', \nu_3')$$

(2) $\alpha$ ist auf den Knoten bijektiv.
(3) $\alpha$ ist verträglich mit "benachbart".
(4) $\alpha$ ist verträglich mit der Aktion von $F_g$.

Nach Konstruktion gilt:

$$\lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}(x') = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}(x) = 0$$

(1) Sei $L = m_x(\nu_1', \nu_2', \nu_3')$, $K = m_{x'}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $K' = m_{x'}(\nu_1', \nu_2', \nu_3')$ und $K \neq K'$. Wie im Beweis von Behauptung 3a in Satz 2.1 folgt, daß zwei der drei Fixpunkte von $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\tilde{X}' \setminus K'$ liegen. Sei also Œ:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\nu_1',\nu_2',\nu_3',\nu_1}(x') = \lambda_{\nu_1',\nu_2',\nu_3',\nu_2}(x') \\ \Rightarrow\ & \lambda_{\nu_2,\nu_1',\nu_2',\nu_1}(x') = 0 \\ \Rightarrow\ & \lambda_{\nu_2,\nu_1',\nu_2',\nu_1}(x) = 0 \\ \Rightarrow\ & \lambda_{\nu_1',\nu_2',\nu_1,\nu_2}(x) = 1 \\ \Rightarrow\ & \lambda_{\nu_1',\nu_2',\nu_3',\nu_1}(x) = \lambda_{\nu_1',\nu_2',\nu_3',\nu_2}(x) \end{aligned}$$

Da aber $m_x(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = m_x(\nu_1', \nu_2', \nu_3')$ ist, sind der rechte und der linke Wert verschieden.

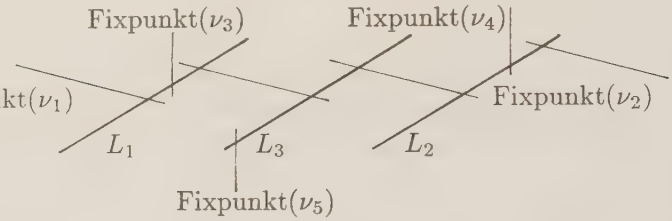
(2) Da in $T^*_{\sigma,x}$ eine Koordinate genau dann 0 wird, wenn sie in $x$ den Wert 0 annimmt, läßt sich die Umkehrabbildung analog definieren, und sie ist aus demselben Grund wohldefiniert.

(3) Der Begriff "benachbart" muß in die Sprache der Koordinaten übersetzt werden. Seien $L_1, L_2$ zwei Komponenten von $\tilde{X}$, so gibt es stets Elemente $\nu_1, \nu_2 \in I$, so daß $L_1$ und $L_2$ auf dem unendlichen Baum $B$ liegen, der die Fixpunkt von $\nu_1$ und $\nu_2$ verbindet. (Wähle Elemente, deren Fixpunkte nicht in der Zusammenhangskomponente von $\tilde{X} \setminus L_1$ (bzw. $L_2$) liegen, in der $L_2$ (bzw. $L_1$) liegt.) Es gibt dann Elemente $\nu_3, \nu_4 \in I$, so daß

$$L_1 = m(\nu_1, \nu_2, \nu_3),\ L_2 = m(\nu_1, \nu_2, \nu_4)$$

ist. $L_1$ und $L_2$ sind benachbart, wenn es keine Komponente $L_3$ auf $B$ gibt, die zwischen $L_1$ und $L_2$ liegt.

Bild:




$L_1$ und $L_2$ sind also benachbart, wenn es kein $\nu_5$ gibt, mit:

$$\lambda_{\nu_2,\nu_1,\nu_3,\nu_5} = 0 \text{ und } \lambda_{\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_5} = 0$$

Da dies in der Faser über $x$ genau dann der Fall ist, wenn es in der Faser über $x'$ auftritt, bleibt "benachbart" erhalten.

(4) Da $\gamma(m(\nu_1,\nu_2,\nu_3)) = m(\gamma\nu_1\gamma^{-1}, \gamma\nu_2\gamma^{-1}, \gamma\nu_3\gamma^{-1})$ ist, ist die Verträglichkeit mit der Aktion von $F_g$ trivial.

**Folg.:** *Da die Graphen $\tilde{G}_x$ und $\tilde{G}_{x'}$ isomorph sind, sind $\sigma$ und $\sigma'$ auch in $x'$ geometrische Basen, d.h., $T^*_{\sigma,x} \subset T_\sigma \cap T_{\sigma'}$. Da der Durchschnitt abgeschlossen ist, folgt, daß*

$$T_{\sigma,x} \subset T_\sigma \cap T_{\sigma'}$$

**Bem.1:** Der Beweis der Folgerung ist auch möglich nur durch Rechnen in den Koordinaten. Zu zeigen ist, daß für $x' \in T^*_{\sigma,x}$ $f_{\sigma'}(\pi_{\sigma'}(x')) = x'$ ist. In Koordinaten gibt das die Gleichung:
($\mu = \mu_\sigma(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, Œ$\mu_{\sigma'}(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = id$)

$$\lambda_{st_\sigma(\mu st_{\sigma'}(\nu_1)\mu^{-1}),\ldots,st_\sigma(\mu st_{\sigma'}(\nu_4)\mu^{-1})}(x') = \lambda_{st_\sigma(\mu\nu_1\mu^{-1}),\ldots,st_\sigma(\mu\nu_4\mu^{-1})}(x')$$

Dabei ist nur der Fall, daß der zweite Wert ungleich $0, 1, \infty$ ist, nicht trivial. Es wird dann schrittweise auf den Fall $\nu_i = st_{\sigma'}(\nu_i)$ für $i = 1, 2, 3$ reduziert. Schwierigkeiten bereitet dann nur der Fall

$$\gamma = st_\sigma(\mu st_{\sigma'}(\nu_4)\mu^{-1}) \neq st_\sigma(\mu\nu_4\mu^{-1}) = \gamma_4$$

Sei Œ$\gamma_i = st_\sigma(\mu\nu_i\mu^{-1})$, so ist zu zeigen:

$$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma}(x') = \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(x')$$

Da $x \in T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ ist, gilt $f_{\sigma'}(\pi_{\sigma'}(x)) = x$, d.h.:

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma}(x) = \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(x) \\
\Rightarrow\ & \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma,\gamma_4}(x) = 1 && \text{, da } \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(x) \neq 0,1,\infty \\
\Rightarrow\ & \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma,\gamma_4}(x') = 1 && \text{, nach Definition} \\
\Rightarrow\ & \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma}(x') = \lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(x') && \text{, Doppelverhältnisgleichungen}
\end{aligned}$$

**Bem.2:** Sei ein Punkt $x \in T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ gegeben. $\sigma'$ sei so konjugiert, daß $\tilde{F}_\sigma$ und $\tilde{F}_{\sigma'}$, in der Faser über $x$ eine gemeinsame Komponente haben. $\tilde{G}_\sigma$ bezeiche den $\tilde{F}_\sigma$ entsprechenden Teil in $\tilde{G}_x$. Für den Fall, daß $\tilde{G}_\sigma$ und $\tilde{G}_{\sigma'}$ gemeinsame Kanten haben, kontrahiere diese Kanten und deren $F_g$-Translate. Man erhält einen neuen Graphen, in dem die Bilder von $\tilde{G}_\sigma$ und $\tilde{G}_{\sigma'}$ sich nur in einem Knoten schneiden. Da alle $F_g$-Translate kontrahiert worden sind, ist die Kontraktion mit der $F_g$-Aktion verträglich. Da Kontraktion mit der Bildung von Medianen verträglich ist, sind die Bilder von $\tilde{G}_\sigma$ und $\tilde{G}_{\sigma'}$ wieder die Mediane der Basiselemente in dem neuen Graphen. $\sigma$ und $\sigma'$ sind für diesen Graphen geometrische Basen, da $\tilde{G}_\sigma$ und $\tilde{G}_{\sigma'}$ durch die Liftung der kontrahierten Gerüste entstehen. Nach Konstruktion haben die beiden Gerüste keine gemeinsame Kante, da gemeinsame Kanten gerade kontrahiert wurden. Wähle also einen Punkt $x_0 \in T_\sigma \cap T_{\sigma'}$, so daß $\tilde{G}_\sigma \cap \tilde{G}_{\sigma'}$ über $x_0$ nur aus einem Knoten besteht, d.h., $\tilde{F}_\sigma \cap \tilde{F}_{\sigma'}$ sich in genau einer Komponente schneiden.

**Lemma2:** $T_\sigma \cap T_{\sigma'} = f_\sigma(B(T_{p_0}, \psi_{p_0}))$, *falls* $f_\sigma(p_0) = x_0$.

**Bew.:** Sei $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$, so folgt die Behauptung aus folgender Tatsache:

$$\lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},\gamma_{i_4}}|T_{\sigma,x_0} \equiv 0 \Rightarrow \lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},\gamma_{i_4}}|T_{\sigma'} \equiv 0 \qquad (*)$$

Da $x' \in T_{\sigma'}$, ist dann:

$$\lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i3},\gamma_{i_4}}(x') = 0 \,\forall i_1, i_2, i_3, i_4 \text{ mit } \lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},\gamma_{i_4}}(x) = 0$$

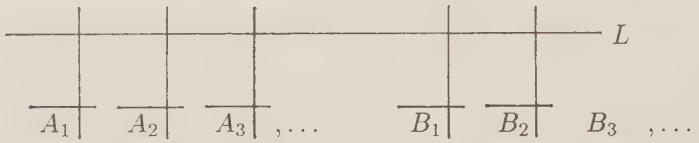
und somit ist $x' \in f_\sigma(B(T_{p_0}, \psi_{p_0})$ nach Definition von $B(T_{p_0}, \psi_{p_0})$.
Zum Beweis von $(*)$:
Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $\gamma_{i_k} = \gamma_k$ und $\sigma' = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$ so konjugiert, daß $st_{\sigma'}(\gamma_i) = \delta_i$, $i = 1, 2, 3$. Es gilt dann, daß

$$m(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = m(st_{\sigma'}(\gamma_1), st_{\sigma'}(\gamma_2), st_{\sigma'}(\gamma_3)) = m(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = L \quad ,$$

denn $\sigma'$ ist geometrische Basis in $x_0$, und der Median hängt nur von den Anfangsbuchstaben ab (Behauptung 2 im Beweis von Satz 2.1). $L$ ist somit die einzige Komponente, die $\tilde{F}_\sigma$ und $\tilde{F}_{\sigma'}$ gemeinsam haben. Betrachte nun die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{X} \setminus L, \tilde{X} \setminus \tilde{F}_\sigma, \tilde{X} \setminus \tilde{F}_{\sigma'}$.

Bild:

Fundamentalbereich von $\sigma$ Fundamentalbereich von $\sigma'$




Es ist $\tilde{X} \setminus L = \bigcup A_i \cup \bigcup B_i$

$\tilde{X} \setminus \tilde{F}_\sigma = \bigcup A_i' \cup \bigcup B_i$ , da $\tilde{F}_\sigma$ ganz in den $A_i$ liegt.

$\tilde{X} \setminus \tilde{F}_{\sigma'} = \bigcup A_i \cup \bigcup B_i'$ , da $\tilde{F}_{\sigma'}$ ganz in den $B_i$ liegt.

Da $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(x) = 0$ ist, müssen die Projektionen der Fixpunkte von $\gamma_1$ und $\gamma_4$ auf $L$ gleich sein, d.h., die beiden Fixpunkte müssen in dem gleichen $A_i$ oder $B_i$ liegen. Da die $B_i$ Zusammenhangskomponenten von $\tilde{X} \setminus \tilde{F}_\sigma$ sind, können nicht zwei Fixpunkte in einem $B_i$ liegen, d.h., die Fixpunkte liegen beide in einem $A_i$ (welches in mehrere $A_i'$ zerfällt). Da dieses $A_i$ aber Zusammenhangskomponente von $\tilde{X} \setminus \tilde{F}_{\sigma'}$ ist, ist $st_{\sigma'}(\gamma_1) = st_{\sigma'}(\gamma_4)$. Folglich ist

$$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} | T_{\sigma'} \equiv 0$$

nach Definition von $f_{\sigma'}$.

**Bem.3:** Aus $(*)$ folgt:

$$T_\sigma \cap T_{\sigma'} \neq \emptyset,\ T_\sigma \cap T_{\sigma''} \neq \emptyset\ ,\ T_{\sigma'} \cap T_{\sigma''} \neq \emptyset \Rightarrow T_\sigma \cap T_{\sigma'} \cap T_{\sigma''} \neq \emptyset$$

Damit läßt sich leicht zeigen, daß die Vereinigung aller $T_{\sigma'}$, die ein festes $T_\sigma$ schneiden, einfach zusammenhängend ist.

**Begr.:** Angenommen $T_\sigma \cap T_{\sigma'} \cap T_{\sigma''} = \emptyset$. Sei $T_\sigma \cap T_{\sigma'} = f_\sigma(B(T_1, \psi_1))$ und $T_\sigma \cap T_{\sigma''} = f_\sigma(B(T_2, \psi_2))$, so ist $B(T_1, \psi_1) \cap B(T_2, \psi_2) = \emptyset$. Man sieht leicht, daß es dann eine Koordinate $\lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4}$ geben muß, mit

$$\lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4} | B(T_1, \psi_1) \equiv 0 \text{ und } \lambda_{i_1,i_2,i_3,i_4} | B(T_2, \psi_2) \equiv \infty.$$

Nach $(*)$ gilt dann:

$$\lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},\gamma_{i_4}}|T_{\sigma'} \equiv 0 \text{ und } \lambda_{\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\gamma_{i_3},\gamma_{i_4}}|T_{\sigma''} \equiv \infty$$

Also wäre $T_{\sigma'} \cap T_{\sigma''} = \emptyset$.

**Bem.4:** Nach Folgerung 2 aus Satz 2.1 läßt sich prinzipiell errechnen, welche $T_{\sigma'}$ ein festes $T_\sigma$ schneiden, also läßt sich auch entscheiden, ob für vorgegebene $\sigma, \sigma'$ $T_\sigma \cap T_{\sigma'} \neq \emptyset$ ist. Dazu muß man jedoch alle schneidenden Komponenten ausrechnen. Schon für $g = 3$ ist dies aufwendig. Mit der Idee in Bemerkung 2 läßt sich ein direktes Verfahren angeben:
Sei $T_\sigma \cap T_{\sigma'} \neq \emptyset$, so wähle ein $x \in T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ wie in Bemerkung 2. Die Gerüste im Quotientenschnittgraphen sind dann in den Kanten disjunkt, d.h., die $F_g$-Translate von $\tilde{F}_\sigma$ und $\tilde{F}_{\sigma'}$ haben keine gemeinsame Kante. Kontrahiere alle $F_g$-Translate von $\tilde{F}_\sigma$, so erhält man den Schnittgraphen $\tilde{G}_0$ zum allgemeinen Punkt in $T_\sigma$. Da dabei keine Kante von $\tilde{F}_{\sigma'}$ kontrahiert worden ist, bleibt dieser Bereich unverändert. Da das Bilden von Medianen mit Kontraktion verträglich ist, gilt:

$$Bild(\tilde{F}_{\sigma'}) = \tilde{F}_\sigma(\sigma') := \text{ Teilbaum erzeugt von den Medianen aller Basiselemente von } \sigma' \text{ im Graphen } \tilde{G}_0$$

ist isomorph zu $\tilde{F}_{\sigma'}$. Insbesondere ist jeder Knoten von $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ Median von Basiselementen aus $\sigma'$. Weiter gilt:
Die Achse eines Elementes $\delta$ aus $\sigma'$ verläuft per Definition durch $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$. In dem Baum über $x$ schiebt $\delta$ auf dieser Achse um eine Länge $l_x(\delta)$. Da $\sigma'$ in $x$ geometrische Basis ist, ist $l_x(\delta)$ um eins größer als die Anzahl der Kanten der Achse, die in $\tilde{F}_{\sigma'}$ liegen. Betrachte die beiden Kanten $\tilde{w}_\delta^+, \tilde{w}_\delta^-$ der Achse von $\delta$, die nicht in $\tilde{F}_{\sigma'}$ liegen, die aber einen gemeinsamen Knoten mit $\tilde{F}_{\sigma'}$ haben. Die beiden Kanten sind vermöge $\delta$ äquivalent. Sind diese beiden Kanten $F_g$-Translate einer Kante in $\tilde{F}_\sigma$, so werden sie kontrahiert. Bezeichne $l_\sigma(\delta)$ die Verschiebungslänge von $\delta$ auf der Achse von $\delta$ in $\tilde{G}_0$, so ist die Anzahl der Kanten der Achse in $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ dann gleich $l_\sigma(\delta)$, ansonsten ist die Anzahl um eins kleiner. Da das Bild der Achse eines Elementes wieder die Achse des Elementes ist, erhält man folgenden ersten Test für den Schnitt:

Seien zwei Basen $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_g)$ und $\sigma' = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$ gegeben. Betrachte den Schnittgraphen $\tilde{G}_0$ des allgemeinen Punktes in $T_\sigma$ und die $F_g$-Aktion auf diesem. Setze:

$$\tilde{F}_\sigma(\sigma') = \left\langle \bigcup_{\delta_i, \delta_j, \delta_k \in \sigma'} m(\delta_i, \delta_j, \delta_k) \right\rangle \subset \tilde{G}_0,$$

der von diesen Knoten erzeugte Teilbaum. Es muß dann gelten:

(i) *Jeder Knoten in $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ ist Median von Basiselementen.*
(ii) *Zu jedem Basiselement $\delta$ von $\sigma'$ betrachte die Kanten der Achse von $\delta$, die in $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ liegen. Ihre Anzahl muß gleich oder um eins kleiner sein als $l_\sigma(\delta)$.*

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ergibt sich, wenn man aus $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ den Schnittgraphen $G_x$ eines allgemeinen Punktes $x \in T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ zurückgewinnen kann. Sei also ein allgemeiner Punkt $x \in T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ gegeben. Aus $\tilde{F}_{\sigma'}$ läßt sich ein 2g-markierter stabiler Graph $(T, \psi) = (T_\sigma(\sigma'), \psi_\sigma(\sigma'))$ gewinnen, indem man die Fixpunkte von $\delta_i$ auf $\tilde{F}_{\sigma'}$ projiziert und als Marke $i$ definiert. Nach Definition von $f_{\sigma'}$ ist dann $T_\sigma \cap T_{\sigma'} = f_{\sigma'}(B(T, \psi))$. Den Schnittgraphen $G_x$ erhält man aus $(T, \psi)$, indem man jeweils den Knoten mit der Marke $i$ mit dem Knoten mit der Marke $-i$ verbindet. Für $G_x$ ist $T$ ein Gerüst, und die Kontraktion von $T$ induziert $\sigma'$. Da aber auch $\sigma$ geometrische Basis und $x$ ein allgemeiner Punkt in $T_\sigma \cap T_{\sigma'}$ ist, muß es ein zu $T$ disjunktes Gerüst $K$ geben, dessen Kontraktion $\sigma$ ergibt. Die Kanten von $K$ sind folgendermaßen charakterisiert:

Sei $w$ eine Kante, die nicht in $T$ liegt. $w$ entstehe durch Verbinden der Marken $i$ und $-i$. $\tilde{w}^+_{\delta_i}$ ist eine Liftung der Kante $w$ nach $\tilde{G}_x$. $w$ gehört zu $K$, genau dann, wenn $\tilde{w}^+_{\delta_i}$ $F_g$-äquivalent zu einer Kante aus $\tilde{F}_\sigma$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\tilde{w}^+_{\delta_i}$ kontrahiert wird, d.h., wenn $l_\sigma(\delta_i)$ gleich der Anzahl der Kanten der Achse von $\delta$ in $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ ist. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ist also gegeben durch:

Seien $\sigma$ und $\sigma'$ gegeben, und (i) und (ii) seien erfüllt. Betrachte den aus $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ entstehenden markierten Graphen $(T_\sigma(\sigma'), \psi_\sigma(\sigma'))$. Dieser induziert einen Graphen $G_\sigma(\sigma')$ vom Geschlecht g, in dem $T$ ein Gerüst ist. Betrachte

die Kanten $w_i$, die durch Verbinden der Marken $i$ und $-i$ entstehen. Wähle die Kanten $w_i$ aus, für die $l_\sigma(\delta_i)$ gleich der Anzahl der Kanten der Achse von $\delta_i$, die in $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ liegen, ist. Die Vereinigung dieser Kanten sei $K_\sigma(\sigma')$. Es ist dann:

$T_\sigma \cap T_{\sigma'} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ *K ist ein Gerüst und Kontraktion von K induziert* $\sigma$.

Nach Folgerung 2 aus Satz 2.1 ist diese Bedingung hinreichend.

**Bsp.:**

a) g=2, $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\sigma' = (\gamma_1^2\gamma_2, \gamma_2)$

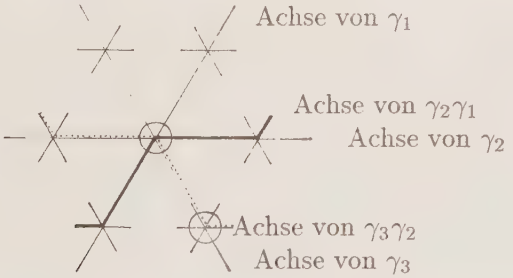
Bild:

$\tilde{F}_\sigma(\sigma') =$ , der mittlere Knoten ist nicht Median.

$T_\sigma \cap T_{\sigma'} = \emptyset$

b) g=3, $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\sigma' = (\gamma_2\gamma_1, \gamma_3\gamma_2, \gamma_3)$

Bild



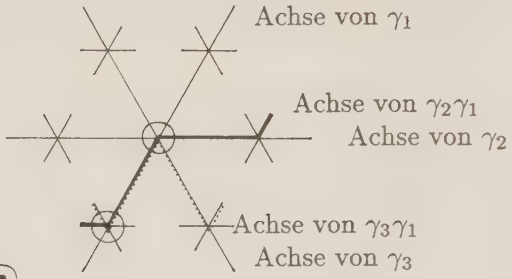

$\tilde{F}_\sigma(\sigma') =$

Jeder Knoten ist Median, aber die Achse von $\gamma_2\gamma_1$ hat mit $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ keine gemeinsame Kante, obwohl $l_\sigma(\gamma_2\gamma_1) = 2$ ist.

$T_\sigma \cap T_{\sigma'} = \emptyset$

c) g=3, $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\sigma' = (\gamma_1, \gamma_2\gamma_1, \gamma_3\gamma_1)$

Bild

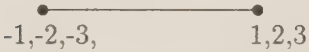



$\tilde{F}_\sigma(\sigma') =$

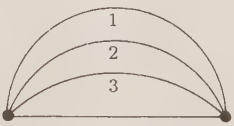
Jeder Knoten ist Median.

Die Achse von $\gamma_1$ schneidet $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ in 1 Kante und schiebt um 1.
Die Achse von $\gamma_2\gamma_1$ schneidet $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ in 1 Kante und schiebt um 2.
Die Achse von $\gamma_3\gamma_1$ schneidet $\tilde{F}_\sigma(\sigma')$ in 1 Kante und schiebt um 2.

Der markierte Baum $(T_\sigma(\sigma'), \psi_\sigma(\sigma'))$ hat die Form:




$G_\sigma(\sigma')$ ist also von der Form:




Die Kanten 2 und 3 gehören nicht zum Gerüst $K$. Die Kante 1 ist das Gerüst $K$, und $K$ induziert die Basis $\sigma$.

$T_\sigma \cap T_{\sigma'} = f_{\sigma'}(B(T_\sigma(\sigma'), \psi_\sigma(\sigma'))) \neq \emptyset$, $dim(T_\sigma \cap T_{\sigma'}) = 2$.

## §4 Der Komplex von Culler-Vogtmann

In diesem Paragraphen soll der Zusammenhang zu dem Komplex $K_g$ von Culler-Vogtmann, wie in [CV] konstruiert, erläutert werden. Die kombinatorische Struktur dieses Komplexes ist die gleiche wie für $T_g^d$. Sie zeigen, daß $K_g$ kontrahierbar ist, woraus gefolgert werden kann, daß $T_g^d$ einfach zusammenhängend ist. Der Komplex $K_g$ klassifiziert folgende Objekte:

**Def.1:** Fixiere den Graphen $G_0$ mit einem Knoten und g Schleifen. Wähle einen festen Isomorphismus $\pi_1(G_0) \approx F_g$. Sei $G$ ein $\mathbb{R}$-Graph, so heißt eine Homotopie

$$h : G_0 \to G$$

eine *Markierung* von $G$. Zwei Markierungen

$$h_1 : G_0 \to G_1,\ h_2 : G_0 \to G_2$$

heißen äquivalent, wenn es eine Isometrie

$$i : G_1 \to G_2$$

gibt, so daß $h_1 \circ i$ bis auf freie Homotopie gleich $h_2$ ist. Eine Äquivalenzklasse von Markierungen heißt ein *markierter Graph* $(G, h)$.

**Bem.1:** Die Markierung $h$ induziert zusammen mit der Wahl des festen Isomorphismus $\pi_1(G_0) \approx F_g$ eine Basis von $\pi_1(G)$. Ein markierter Graph ist also gegeben durch die Länge seiner Kanten und die Wahl einer Basis seiner Fundamentalgruppe (bis auf Konjugation, da freie Homotopie erlaubt ist).
Ein markierter Graph $(G, h)$ induziert eine Längenfunktion auf $F_g$. Für ein Wort $w \in \pi_1(G_0)$ sei $l(w)$ gleich der Länge des kürzesten Weges in der Homotopieklasse von $\pi_1(h)[w] \in \pi_1(G)$. $l$ ist dann eine Funktion auf den Konjugationsklassen von $F_g$. Mit Hilfe dieser Längenfunktionen läßt sich der Raum $K_g$ definieren.

**Def.2:** Sei $\mathcal{K}$ die Menge der Konjugationsklassen in $F_g$. Ein markierter Graph läßt sich vermöge

$$(G, h) \longmapsto \Big(l\big(h(w)\big)\Big)_{[w]\in\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{K}}$$

nach $\mathbb{R}^K$ abbilden. Die Menge der Bilder sei $\tilde{K}_g$. Betrachtet man nur markierte Graphen, bei denen die Summe der Längen aller Kanten gleich 1 ist, so sind diese Graphen durch das Bild von $\tilde{K}_g$ in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^K)$ klassifiziert. Das Bild heiße $K_g$.

**Satz1:** *$K_g$ ist kontrahierbar.*

**Bew.:** [CV], Seite 93

**Bem.2:** Dieses Ergebnis allein reicht noch nicht aus. Die Idee des Beweises soll im weiteren erläutert werden (siehe [CV], Seite 95–97). Die Autoren unterteilen den Komplex $K_g$ in Teile $K_\sigma$, wobei $\sigma$ die gleiche Menge durchläuft wie für die $T_\sigma$. Für eine Basis $\sigma$ sei $K_\sigma$ die Menge der markierten Graphen $(G, h)$, für die es eine Kontraktion $k$ von $G$ nach $G_0$ gibt, so daß

$$k \circ h : G_0 \longmapsto G_0$$

die Basis $\sigma$ induziert. Es ist dann

$$K_g = \bigcup_\sigma K_\sigma$$

Im Beweis wird die Menge der Basen $\sigma$ so nummeriert, daß

$$\left( \bigcup_{i=1}^{n} K_{\sigma_i} \right) \cap K_{\sigma_{n+1}}$$

kontrahierbar ist ([CV], Seite 115–118). Da jedes $K_\sigma$ kontrahierbar ist, folgt, daß $K_g$ kontrahierbar ist. Nach Konstruktion gilt nun:

**Lemma1:** $K_\sigma \cap K_{\sigma'} = \emptyset \Leftrightarrow T_\sigma \cap T_{\sigma'} = \emptyset$

Mithilfe einer speziellen Version des van Kampen-Theorems ermöglicht dies den Beweis des einfachen Zusammenhanges von $T_g^d$.

**Satz2:** *Sei $A$ ein separabler, regulärer topologischer Raum.*
*$A = C_1 \cup C_2$; $C_1$ und $C_2$ abgeschlossen; $B = C_1 \cap C_2$.*
*$C_1$ und $C_2$ seien 0-,1-,2-zusammenhängend.*

*B sei 0-,1-zusammenhängend und wegweise zusammenhängend.*
*Es gilt dann:*

*Die Fundamentalgruppe von A wird von den Fundamentalgruppen von $C_1$ und $C_2$ erzeugt. Insbesondere ist A einfach zusammenhängend, wenn $C_1$ und $C_2$ es sind.*

**Bew.:** Der Beweis einer schärferen Aussage ist zu finden in [K], Seite 267 (Korollar 2).

**Bem.3:** Da die $T_\sigma$ Mannigfaltigkeiten sind, sind die Voraussetzungen von Satz2 erfüllt, d.h., falls

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_{\sigma_i}\right) \cap T_{\sigma_n}$$

zusammenhängend ist, ist $T_g^d$ einfach zusammenhängend.

**Lemma2:** $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} T_{\sigma_i}\right) \cap T_{\sigma_n}$ *ist wegweise zusammenhängend.*

**Bew.:** Setze

$$\tilde{T}_{\sigma_n} = \bigcup_{i=1}^{n-1} T_{\sigma_i} \text{ und } T_{\sigma,\sigma'} = T_\sigma \cap T_{\sigma'}$$

Es ist dann

$$\tilde{T}_{\sigma_n} \cap T_{\sigma_n} = \bigcup_{i=1}^{n-1} T_{\sigma_n,\sigma_i}$$

Mit analogen Definitionen gilt:

$$\tilde{K}_{\sigma_n} \cap K_{\sigma_n} = \bigcup_{i=1}^{n-1} K_{\sigma_n,\sigma_i}$$

und diese Menge ist wegweise zusammenhängend.

Für $i_1, i_2 < n$ gibt es also einen Weg $w$ von $K_{\sigma_n,\sigma_{i_1}}$ nach $K_{\sigma_n,\sigma_{i_2}}$. Wähle eine Kette $\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_r}$, so daß $w$ sich unterteilen läßt in Stücke $w_1, \ldots, w_r$ mit $w_k \subset K_{\sigma_n,\sigma_{j_k}}$. Es folgt, daß

$$K_{\sigma_{j_k}} \cap K_{\sigma_{j_{k+1}}} \neq \emptyset \ \forall k = 1, \ldots, r-1$$

ist. Nach Lemma1 ist dann

$$T_{\sigma_{j_k}} \cap T_{\sigma_{j_{k+1}}} \neq \emptyset$$

Da $w \subset K_{\sigma_n}$ ist, ist auch

$$K_{\sigma_n} \cap K_{\sigma_{j_k}} \neq \emptyset \ \forall k \Rightarrow T_{\sigma_n} \cap T_{\sigma_{j_k}} \neq \emptyset$$

Nach Bem.3.3 ist also

$$T_{\sigma_{j_k}} \cap T_{\sigma_{j_{k+1}}} \cap T_{\sigma_n} \neq \emptyset$$

Es gibt also einen Weg von $T_{\sigma_n,\sigma_{j_k}}$ nach $T_{\sigma_n,\sigma_{j_{k+1}}}$. Es folgt, daß es einen Weg von $T_{\sigma_n,\sigma_{i_1}}$ nach $T_{\sigma_n,\sigma_{i_2}}$ in $\tilde{T}_{\sigma_n} \cap T_{\sigma_n}$ gibt, d.h., $\tilde{T}_{\sigma_n} \cap T_{\sigma_n}$ ist wegweise zusammenhängend.

**Satz3:** *$T_g^d$ ist einfach zusammenhängend.*

**Bew.:** Mit Induktion über n beweise, daß $\tilde{T}_{\sigma_n}$ einfach zusammenhängend ist. Da jedes $T_\sigma$ nur endlich viele andere $T_{\sigma'}$ schneidet, kann jeder Weg nur endlich viele $T_\sigma$ schneiden. Es folgt die Behauptung.

n=1: $T_\sigma$ ist isomorph zu $B_{2g}$, also nach Satz1.2 birational zu $P_1^{2g-3}$. Es folgt (siehe [HK], Seite 252), daß die Fundamentalgruppe von $T_\sigma$ gleich der von $P_1^{2g-3}$, also trivial ist.

n>1: $\tilde{T}_{\sigma_n}$ ist nach Induktionsvoraussetzung einfach zusammenhängend. $T_{\sigma_n}$ ist ebenfalls einfach zusammenhängend. Nach Lemma2 ist $\tilde{T}_{\sigma_n} \cap T_{\sigma_n}$ wegweise zusammenhängend. Nach Satz2 ist dann $\tilde{T}_{\sigma_n} \cup T_{\sigma_n}$ einfach zusammenhängend.

**Folg.:** *$T_g^d/Aut(F_g)$ = Modulraum für total degenerierte Kurven ist einfach zusammenhängend.*

**Bew.:** $Aut(F_g)$ wird erzeugt von Vertauschungen der Basiselemente und von

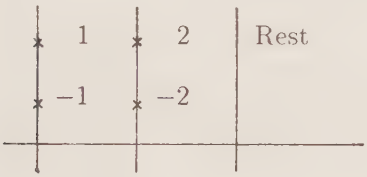
$$\gamma_i \mapsto \gamma_j^{-1}\gamma_i$$

oder

$$\gamma_i \mapsto \gamma_i^{-1}$$

wobei jeweils alle anderen Basiselemente festgehalten werden (siehe [H], Seite 192). Damit läßt sich zeigen, daß $Aut(F_g)$ von Elementen mit Fixpunkten erzeugt wird:

Das Vertauschen und Invertieren von Basiselementen hält die Komponente zu $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ fest, d.h., man kann sich auf die Betrachtung von $B_{2g}$ beschränken. Sei Œ $i = 1, j = 2$. Beide Operationen haben einen gemeinsamen Fixpunkt, nämlich den markierten Baum:



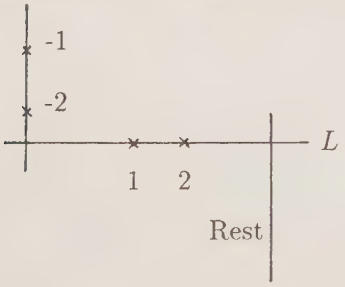

Der dritte Automorphismus ist nicht so leicht zu behandeln. Betrachte statt des angegebenen Automorphismus den Automorphismus:

$$\gamma_1 \overset{\phi}{\mapsto} \gamma_2\gamma_1^{-1}$$
$$\gamma_2 \overset{\phi}{\mapsto} \gamma_1^{-1}$$

Dieser ist von Ordnung 3. In der Komponente zu $\sigma = (\gamma_1 \ldots, \gamma_g)$ gibt es einen Fixpunkt $p$. Er muß die Gleichungen

$$\lambda_{st(\nu_1),\ldots st(\nu_4)} = \lambda_{st(\mu\phi(\nu_1)\mu^{-1}),\ldots,st(\mu\phi(\nu_4)\mu^{-1})}$$

erfüllen. Durch eine längere, aber leichte Rechnung bekommt man die kombinatorische Gestalt von $p$. Der markierte Baum zu $p$ hat die Gestalt:



Die einzige Gleichung, die nicht durch die kombinatorische Struktur erfüllt wird, ist die Gleichung:

$$\begin{aligned}\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_1^{-1},\gamma_i} &= \lambda_{\gamma_2\gamma_1^{-1},\gamma_1^{-1},\gamma_1\gamma_2^{-1},\gamma_i} \\ &= \lambda_{\gamma_2,\gamma_1^{-1},\gamma_1,\gamma_i} \\ &= \frac{1}{1-\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_1^{-1},\gamma_i}}\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösung $-\xi$, wobei $\xi$ eine dritte Einheitswurzel ist. Das Vertauschen von $1, 2, -1$ auf $L$ darf das Doppelverhältnis der drei Markierungen mit einer Markierung aus dem Rest nicht ändern. Normiert man die drei Markierungen $1, 2, -1$ auf $L$ nicht durch $0, \infty, 1$, sondern durch $1, \xi, \xi^2$, so geht $-\xi$ nach 0. Man sieht, daß das Vertauschen der drei Marken dann den Punkt 0 festhält. $p$ ist dann Fixpunkt von $\phi$. Mithilfe von Lemma3 folgt dann die Behauptung.

**Lemma3:** *$X$ sei ein einfach zusammenhängender topologischer Raum, und $G$ operiere diskontinuierlich auf $X$. Zu jedem Weg $w : [0,1] \to X/G$ gebe es einen Weg $\tilde{w} : [0,1] \to X$, so daß $\pi \circ \tilde{w}$ homotop zu $w$ ist ($\pi : X \to X/G$). $G$ werde von Elementen erzeugt, die auf $X$ einen Fixpunkt haben, dann ist $X/G$ einfach zusammenhängend.*

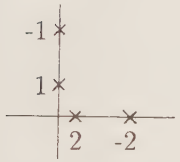
**Bew.:** [G], Seite 54

Die Aktion von $Aut(F_g)$ auf $T_g^d$ ist diskontinuierlich, da es stets nur endlich viele $\phi$ in $Aut(F_g)$ gibt mit $\phi(T_\sigma) \cap T_\sigma \neq \emptyset$.

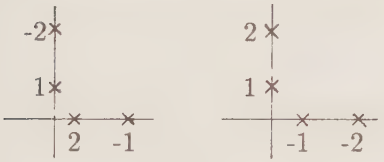
## §5 Spezialfall g=2 und g=3

### *A* g=2

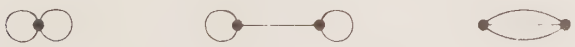
Für g=2 ist die Situation sehr einfach. Jedes $T_\sigma$ ($\sigma = (\gamma_1, \gamma_2)$) ist isomorph zu $B_4$, also isomorph zu $P_1$. Die Koordinate $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_1^{-1},\gamma_2^{-1}}$ ist eine Koordinate für den $P_1$. Der Punkt 1 entspricht dem markierten Baum:




Die Punkte 0 und $\infty$ entsprechen den markierten Bäumen:

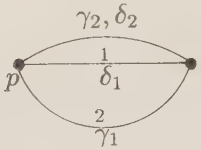



In diesen beiden Punkten wird $T_\sigma$ von anderen Komponenten geschnitten. Um dies zu berechnen, betrachte man alle stabilen Graphen vom Geschlecht 2. Dies sind folgende:



I II III

(I) gehört zum allgemeinen Punkt in $T_\sigma$, (II) entspricht dem Punkt 1, und (III) gehört zu den Punkten 0 und $\infty$. Wie man sieht, läßt nur der Graph (III) disjunkte Gerüste zu. Man hat also folgende Situation:




Die Kante 1 sei das Gerüst zu $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Die Kante 2 das Gerüst zu $\sigma' = (\delta_1, \delta_2)$. $p$ sei der Aufpunkt. Die Elemente $\gamma_i, \delta_i$ seien durch die Wege gegeben, die in $p$ beginnen und durch das jeweilige Gerüst und die Kante $\gamma_i$ bzw. $\delta_i$ in der angegebenen Richtung verlaufen. Man rechnet nach, daß dann

$$(\delta_1, \delta_2) = (\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$$

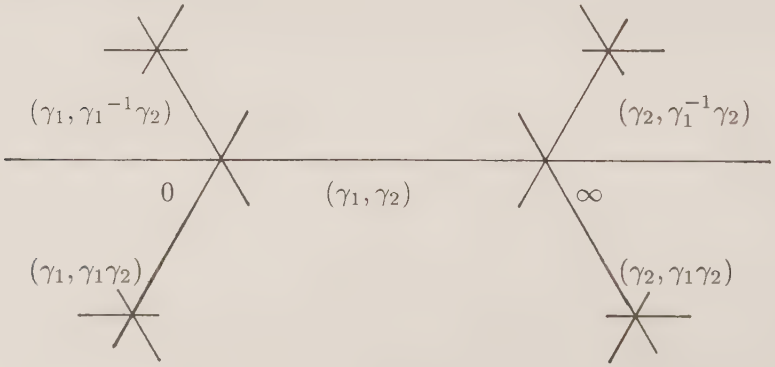
ist. Durch Vertauschen von 1 und 2 , sowie durch Inversenbildung bei $\gamma_1$ oder $\gamma_2$ erhält man 7 weitere Möglichkeiten für die Basis $(\delta_1, \delta_2)$. Diese sind:

$$(\gamma_1^{-1}, \gamma_1\gamma_2), (\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}), (\gamma_1^{-1}, \gamma_1\gamma_2^{-1}), (\gamma_2, \gamma_2^{-1}\gamma_1),$$
$$(\gamma_2^{-1}, \gamma_2\gamma_1), (\gamma_2, \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}), (\gamma_2^{-1}, \gamma_2\gamma_1^{-1}).$$

Je zwei davon gehören zum gleichen $T_{\sigma'}$ (z.B. unterscheidet sich $(\gamma_1, \gamma_1\gamma_2^{-1})$ nur um Konjugation mit $\gamma_1$ und um Inversenbildung von $(\gamma_1^{-1}, \gamma_1\gamma_2^{-1})$). Man erhält vier Komponenten $T_{\sigma'}$, die $T_\sigma$ schneiden. Die dazugehörigen Basen sind (in anderer Form):

$$(\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2), (\gamma_1, \gamma_1\gamma_2), (\gamma_2, \gamma_1^{-1}\gamma_2), (\gamma_2, \gamma_1\gamma_2)$$

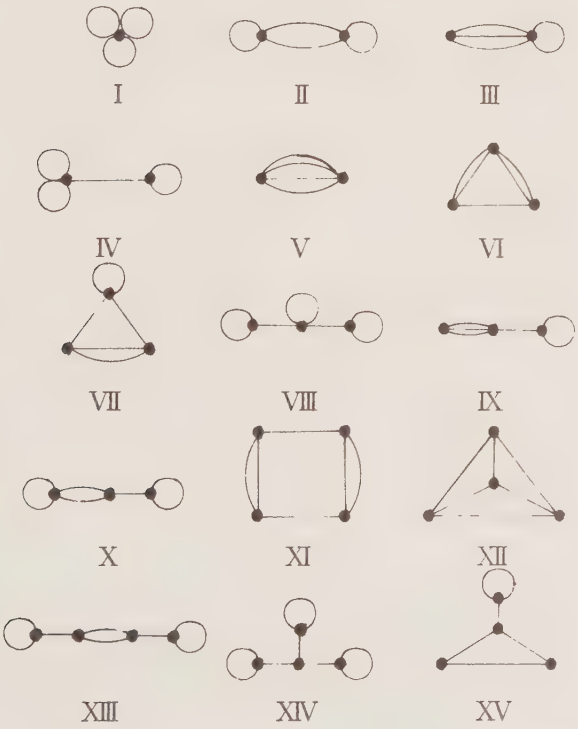
Man sieht leicht, daß die Komponenten zu den beiden ersten Basen $T_\sigma$ in 0, die zu den beiden letzten $T_\sigma$ in $\infty$ schneiden. Lokal ergibt sich also folgendes Bild:



Man kann nun leicht nachweisen, daß die Summe der Wortlängen der beiden Basiselemente bei Komponenten, die von $T_\sigma$ weiter entfernt sind, größer ist als bei näheren. Dies zeigt, daß $T_2^d$ einfach zusammenhängend ist.

## $\mathcal{B}$ g=3

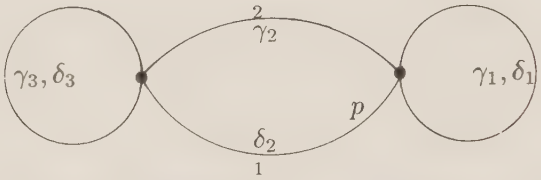
Für g=3 ist die Situation schon erheblich komplizierter. Jedes $T_\sigma$ ist isomorph zu $B_6$. Um die schneidenden Komponenten zu berechenen, betrachte wieder alle stabilen Graphen vom Geschlecht 3. Dies sind:




In diesen Graphen müssen nun disjunkte Gerüstepaare gesucht werden. Dabei ergibt die Vertauschung der beiden Gerüste einen neuen Fall. Die

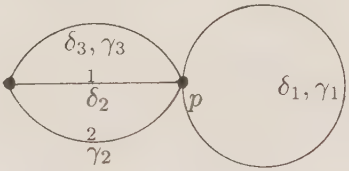
Gerüstepaare sind jedoch nur modulo Automorphismen der Graphen zu betrachten. Die Graphen IV, VIII, IX, X, XIII, XIV, XV lassen keine disjunkten Gerüste zu, da sie Brücken enthalten. Es bleiben die sieben Graphen II, III, V, VI, VII, XI, XII. Bis auf den Graphen VI, der drei verschiedene Gerüstepaare zuläßt, hat jeder Graph nur ein Gerüstepaar. Bei VI tritt auch der Fall auf, daß durch Vertauschen der beiden Gerüste ein nicht isomorphes Paar entsteht. Mit den Bezeichnungen wie für g=2 ergeben sich folgende 9 Fälle:

a)



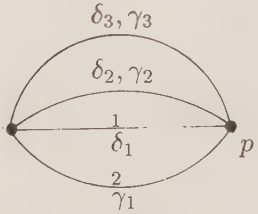

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1})$$

b)



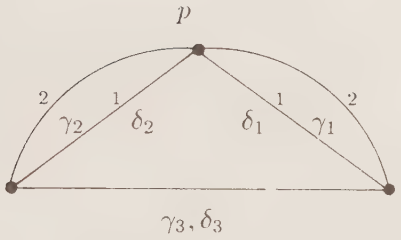

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\gamma_2^{-1})$$

c)



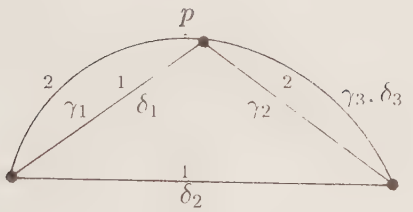

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_2\gamma_1^{-1}, \gamma_3\gamma_1^{-1})$$

d)




$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^{-1}\gamma_3\gamma_2)$$

e+f)



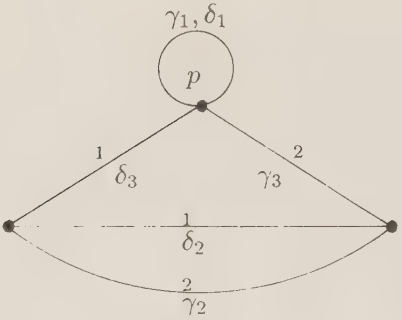

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}, \gamma_3\gamma_2)$$

Das Vertauschen der Gerüste ergibt in diesem Fall kein isomorphes Paar. Man erhält die Darstellung:

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}, \gamma_3\gamma_2\gamma_1)$$

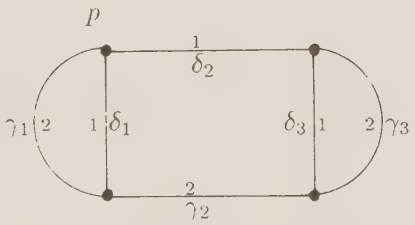
(Dies ist die Darstellung der $\gamma_i$ in den $\delta_j$ bzgl. der obigen Gleichung.)

g)



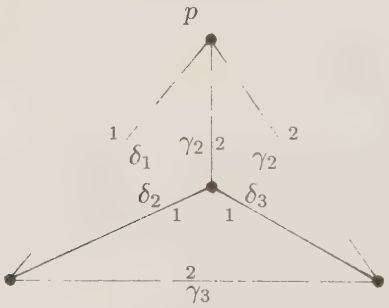

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_3^{-1}\gamma_2\gamma_3, \gamma_3^{-1}\gamma_2)$$

h)




$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_1, \gamma_3\gamma_2\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_2\gamma_1)$$

i)




$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\gamma_3\gamma_2, \gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_1, \gamma_2^{-1}\gamma_1)$$

Durch Vertauschen und Inversenbildung ergeben sich weitere Basen. Diese neun Basen haben in normierter Form (siehe § 6) die Gestalt:

a) $(\ \gamma_1\ ,\ \gamma_3\ ,\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\ )$ : 6 Komponenten
b) $(\ \gamma_1\ ,\ \gamma_3\ ,\ \gamma_2\gamma_1\ )$ : 24 Komponenten
c) $(\ \gamma_1\ ,\ \gamma_1\gamma_2\ ,\ \gamma_1\gamma_3\ )$ : 12 Komponenten
d) $(\ \gamma_1\ ,\ \gamma_2\ ,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1\ )$ : 24 Komponenten
e) $(\ \gamma_1\ ,\ \gamma_3\gamma_1\ ,\ \gamma_3\gamma_2\ )$ : 48 Komponenten
f) $(\ \gamma_1\ ,\ \gamma_1\gamma_2\ ,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ )$ : 48 Komponenten
g) $(\ \gamma_1\ ,\ \gamma_2\gamma_3\ ,\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}\ )$ : 24 Komponenten
h) $(\ \gamma_1\ ,\gamma_3\gamma_2\gamma_1\ ,\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}\ )$ : 24 Komponenten
i) $(\gamma_2\gamma_1\ ,\ \gamma_2\gamma_3\ ,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1\ )$ : 24 Komponenten

Insgesamt hat man 234 Komponenten.

Als letztes stellt sich nun die Frage, wie sich diese Komponenten untereinander schneiden. Dies wird in einem Anhang aufgelistet. Hier eine Tabelle, die angibt, wieviele Komponenten vom Typ $x$ eine Komponente vom Typ $y$ schneidet:

| $y$ \ $x$ | a | b | c | d | e | f | g | h | i | gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 8 | 8 | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 28 |
| b | 2 | 11 | 12 | 6 | 6 | 4 | 4 | 6 | 16 | 67 |
| c | 1 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 4 | 26 |
| d | 1 | 6 | 6 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 4 | 26 |
| e | 1 | 6 | 4 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 17 |
| f | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| g | 0 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 4 | 14 |
| h | 0 | 12 | 12 | 6 | 0 | 0 | 6 | 2 | 12 | 50 |
| i | 0 | 8 | 4 | 2 | 0 | 0 | 2 | 3 | 7 | 26 |

## §6 Anhang

Aus den Basen für die neun Grundtypen, die für g=3 in §5 errechnet wurden, lassen sich nun alle schneidenden Komponenten errechnen. Durch Vertauschen der Indizes $1, 2, 3$ und durch Inversenbildung der einzelnen Basiselemente lassen sich $48 = 6 \cdot 2^3$ Basen vom gleichen Typ errechnen, so daß die entsprechenden Komponenten das feste $T_\sigma$ ($\sigma = (\gamma_1, \gamma_1, \gamma_3)$) schneiden. Diese 48 Komponenten müssen nicht notwendig verschieden sein. Es kommt vor, daß einige der 48 entstehenden Basen sich nur um Inversenbildung oder Reihenfolge unterscheiden. Um dies mit einem Computerprogramm berechnen zu können, wurde jede Basis $\sigma' = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ in eine eindeutig bestimmte Form gebracht. Zuerst wird getestet, ob durch Konjugation der Basis die Summe der Längen der Basiselemente verkürzt werden kann. Falls die Summe minimal ist, kann es noch ein Basiselement $\gamma_i$ von $\sigma$ geben, so daß nach Konjugation von $\sigma'$ mit $\gamma_i$ die Summe der Längen der Basiselemente gleichbleibt. In diesem Fall wird mit $\gamma_i$ konjugiert, falls $i > 0$ ist. Die Menge $\{\delta_1, \delta_1^{-1}, \delta_2, \delta_2^{-1}, \delta_3, \delta_3^{-1}\}$ ist dann eindeutig bestimmt. Durch die Darstellung eines Elementes $\gamma$ in $\sigma$ erhält man eine lexikographische Ordnung auf $F_g$ bzgl. der Ordnung $\gamma_3^{-1} < \gamma_2^{-1} < \gamma_1^{-1} < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$. Wähle aus jedem Paar $(\delta_i, \delta_i^{-1})$ das größere aus. Dies sei $\delta_i$. Ordnet man $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ der Größe nach an, so erhält man eine eindeutige Darstellung der Basis $\sigma'$. Das Programm erzeugt also die 48 Basen, normiert diese und entfernt doppelte. Auf diese Weise erhält man die 234 Komponenten $T_{\sigma'}$.

Die nächste Frage ist, wie sich diese 234 Komponenten schneiden. Dies wurde wieder von einem Programm überprüft. Das Programm errechnet alle Komponenten $T_{\sigma''}$, die ein festes $T_{\sigma'}$ schneiden, normiert diese bzgl. $\sigma$ und vergleicht sie mit den vorhandenen $T_{\sigma'}$. Man erhält eine vollständige Tabelle des Schnittverhaltens. Auf den nächsten Seiten werden diese Ergebnisse aufgelistet. Es werden zuerst die Basen, die sich aus den Grundtypen errechnen, aufgelistet und nummeriert. In den nachfolgenden Tabellen wird das Schnittverhalten aufgelistet. Leere Felder bedeuten keinen Schnitt. Die Zahlen geben an, von welchem Typ die Komponente $T_{\sigma''}$ in Bezug auf die Komponente $T_{\sigma'}$ ist. Inbesondere läßt sich die Dimension des Durchschnitts ermitteln.

1:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1})$
2:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1})$
3:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1})$
4:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1})$
5:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1})$
6:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1})$

7:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1)$
8:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_1^{-1}\gamma_2)$
9:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1^{-1})$
10:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2)$
11:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\gamma_1)$
12:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1^{-1}\gamma_3)$
13:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\gamma_1^{-1})$
14:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3)$
15:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2)$
16:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1^{-1})$
17:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_1^{-1}\gamma_2)$
18:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1)$
19:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\gamma_2)$
20:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_2^{-1}\gamma_3)$
21:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\gamma_2^{-1})$
22:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3)$
23:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_1\gamma_3)$
24:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1^{-1})$
25:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_1^{-1}\gamma_3)$
26:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1)$
27:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_3)$
28:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2^{-1})$
29:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_2^{-1}\gamma_3)$
30:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2)$

31:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3)$
32:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})$
33:$(\gamma_1,\gamma_2\gamma_1^{-1},\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_3)$
34:$(\gamma_1,\gamma_2\gamma_1^{-1},\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1})$
35:$(\gamma_1,\gamma_2\gamma_1^{-1},\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1})$
36:$(\gamma_1,\gamma_2\gamma_1^{-1},\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1})$
37:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3^{-1}\gamma_2)$
38:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3\gamma_2)$
39:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_3\gamma_2)$
40:$(\gamma_1,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_1\gamma_3^{-1}\gamma_2)$
41:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_3,\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1})$
42:$(\gamma_1,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1})$
43:$(\gamma_1,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1})$
44:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_3)$
45:$(\gamma_1,\gamma_3\gamma_1^{-1},\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})$
46:$(\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3)$
47:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_1,\ \gamma_2\gamma_1\gamma_3)$
48:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_1,\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})$
49:$(\gamma_2,\gamma_2\gamma_1^{-1},\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1})$
50:$(\gamma_2,\gamma_2\gamma_1^{-1},\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1})$
51:$(\gamma_2,\gamma_2\gamma_1^{-1},\ \gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_3)$
52:$(\gamma_2,\gamma_2\gamma_1^{-1},\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1})$
53:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_1,\ \gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1)$
54:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_1,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1)$
55:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1)$
56:$(\gamma_2,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1)$
57:$(\gamma_2,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1})$
58:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_3)$
59:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1})$
60:$(\gamma_2,\gamma_3\gamma_2^{-1},\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1})$
61:$(\gamma_2,\gamma_3\gamma_2^{-1},\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})$
62:$(\gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1\gamma_3)$
63:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2)$
64:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_1^{-1},\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})$
65:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1})$
66:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1})$
67:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2)$
68:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1,\ \gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1)$
69:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_1^{-1},\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})$
70:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1,\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1)$
71:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1)$
72:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_2^{-1},\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})$
73:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1)$
74:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2)$
75:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1})$
76:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1})$
77:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_2^{-1},\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})$
78:$(\gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2)$
79:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1)$
80:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1)$
81:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_2)$
82:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1^{-1}\gamma_3\gamma_2)$
83:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1})$
84:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1})$
85:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3^{-1}\gamma_2)$
86:$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3\gamma_2)$
87:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1)$
88:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3)$
89:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1)$
90:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_3)$
91:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1})$
92:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_3)$
93:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})$
94:$(\gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3)$
95:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2)$
96:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_3)$
97:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1})$
98:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_3)$
99:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2)$
100:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_2^{-1}\gamma_1\gamma_3)$
101:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})$
102:$(\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1\gamma_3)$

103:$(\gamma_1,\ \gamma_2\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1})$
104:$(\gamma_1,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1})$
105:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1})$
106:$(\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1})$
107:$(\gamma_1,\ \gamma_3\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1})$
108:$(\gamma_2,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1})$
109:$(\gamma_1,\gamma_3\gamma_2^{-1},\ \gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1})$
110:$(\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1})$
111:$(\gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1})$
112:$(\gamma_2,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1})$
113:$(\gamma_3,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1})$
114:$(\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1})$
115:$(\gamma_2,\ \gamma_3\gamma_1,\ \gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1})$
116:$(\gamma_1,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1})$
117:$(\gamma_2,\gamma_3\gamma_1^{-1},\ \gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1})$

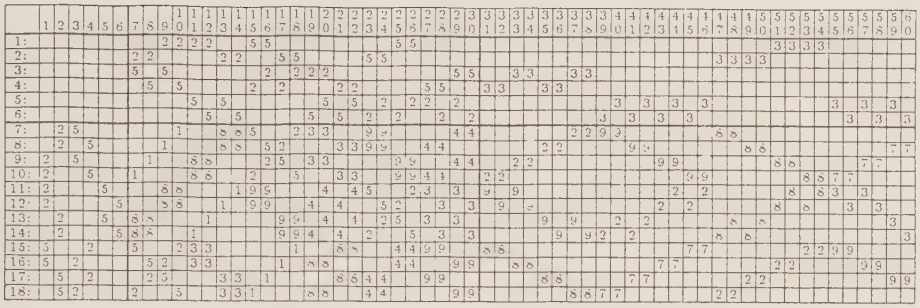
118:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}$)
119:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
120:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
121:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
122:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
123:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$)
124:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
125:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$)
126:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}$)

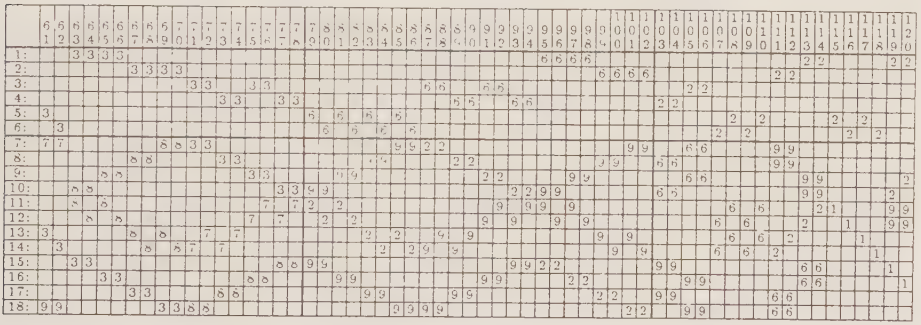
127:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}$)
128:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$)
129:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1$)
130:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2$)
131:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}$)
132:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1}$)
133:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}$)
134:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_3^{-1}$)
135:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
136:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1$)
137:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1}$)
138:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
139:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
140:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}$)
141:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$)
142:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$)
143:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
144:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_1\gamma_3^{-1}\gamma_2$)
145:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}$)
146:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
147:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
148:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
149:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}$)
150:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}$)

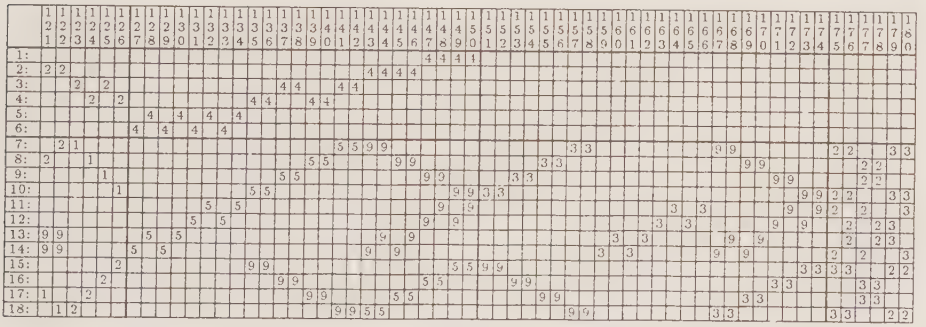
151:( $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_1$)
152:( $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1$)
153:( $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1}$)
154:( $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
155:( $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
156:( $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}$)
157:( $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$)
158:( $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1\gamma_3$)
159:( $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$)
160:( $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$)
161:( $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1$)
162:( $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_2$)
163:( $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
164:( $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_2^{-1}$)
165:( $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}$)
166:( $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1\gamma_2$)
167:( $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_3\gamma_2$)
168:( $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_1\gamma_3^{-1}\gamma_2$)
169:( $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}$)
170:( $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
171:( $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
172:( $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
173:( $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}$)
174:( $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$)

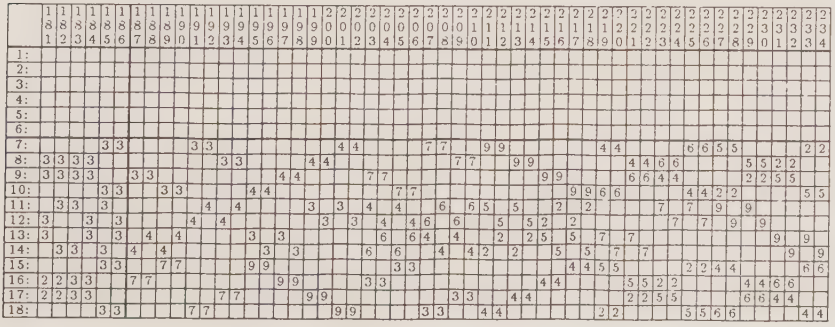
175:( $\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$)
176:( $\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
177:( $\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
178:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
179:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3$)
180:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
181:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
182:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
183:( $\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2$)
184:( $\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
185:( $\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
186:( $\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)

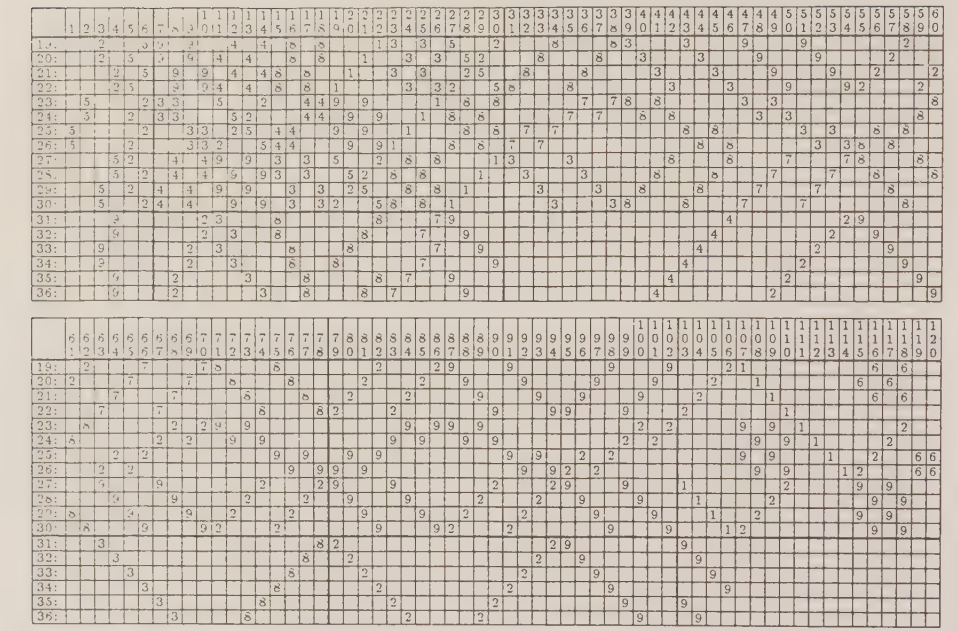
187:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2$)
188:( $\gamma_1$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
189:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
190:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
191:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
192:( $\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
193:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
194:( $\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3$)
195:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3$)
196:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
197:( $\gamma_1$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
198:( $\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$)
199:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
200:( $\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
201:( $\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
202:( $\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_2$)
203:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2$)
204:( $\gamma_2$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
205:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
206:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
207:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
208:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
209:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
210:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3$)
211:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$)
212:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
213:( $\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
214:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
215:( $\gamma_2$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
216:( $\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$)
217:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
218:( $\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_1$)
219:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_2\gamma_3$)
220:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
221:( $\gamma_3$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
222:( $\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_2$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$)
223:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
224:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_2^{-1}$)
225:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$)
226:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_2$)
227:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$)
228:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
229:( $\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$)
230:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1^{-1}$, $\gamma_3\gamma_1^{-1}$)
231:( $\gamma_3$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
232:( $\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_1^{-1}\gamma_2$)
233:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_1^{-1}\gamma_3$)
234:( $\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_3\gamma_1$)

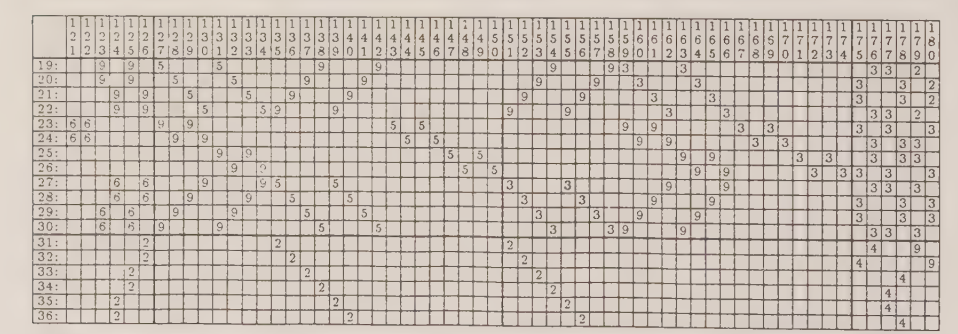


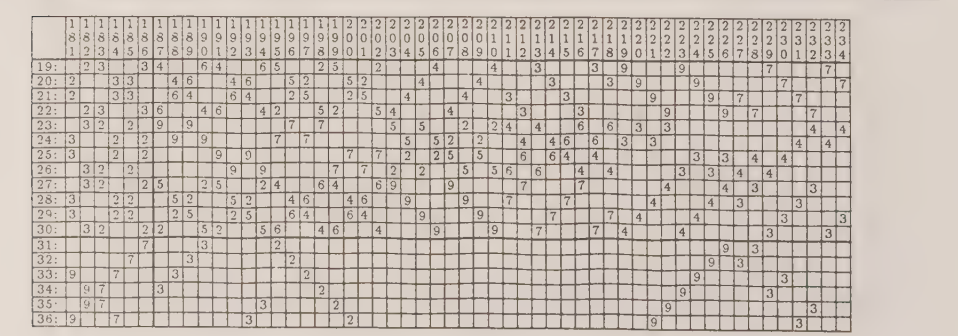


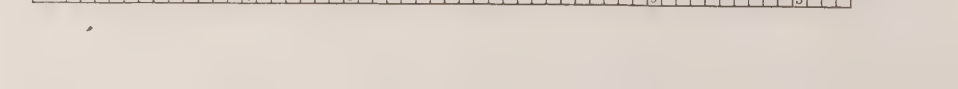


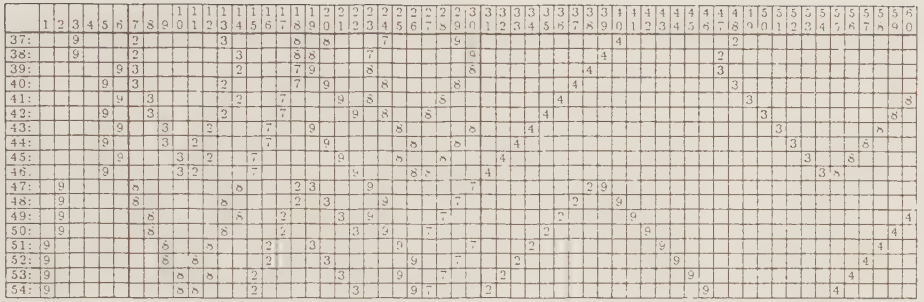


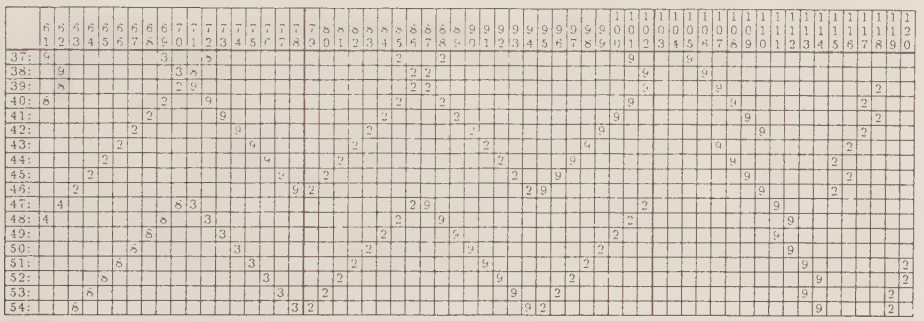


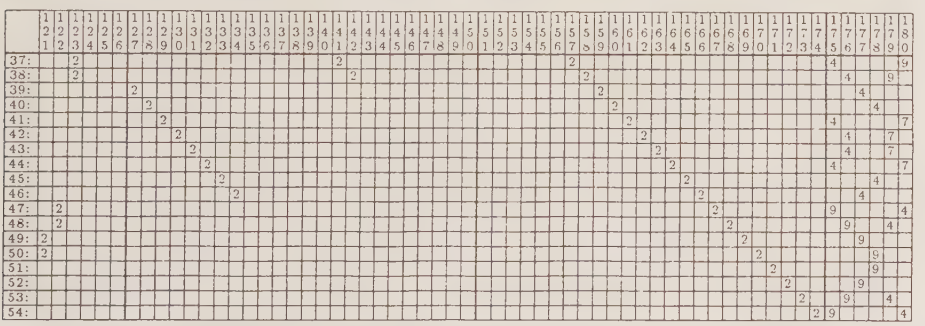


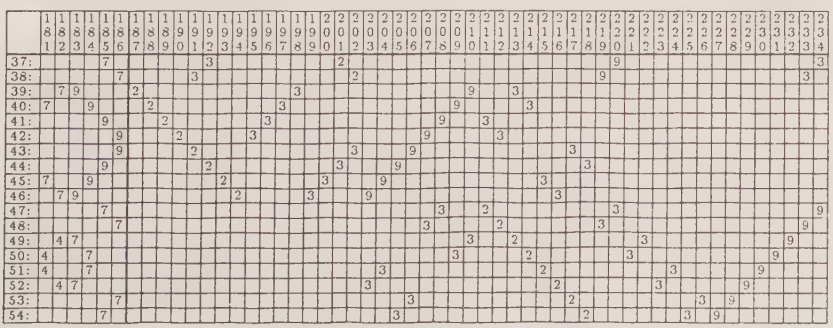


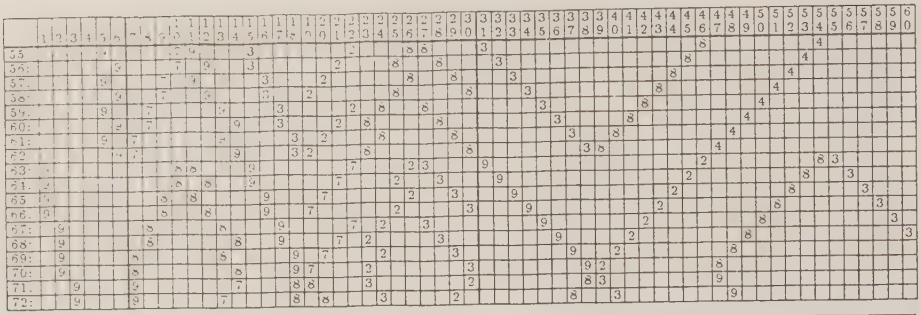


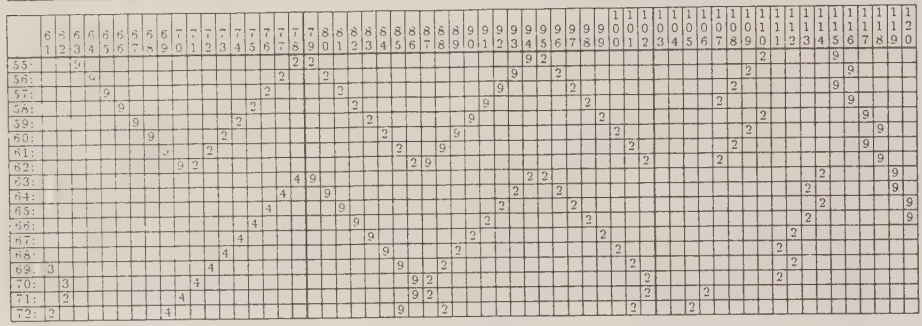


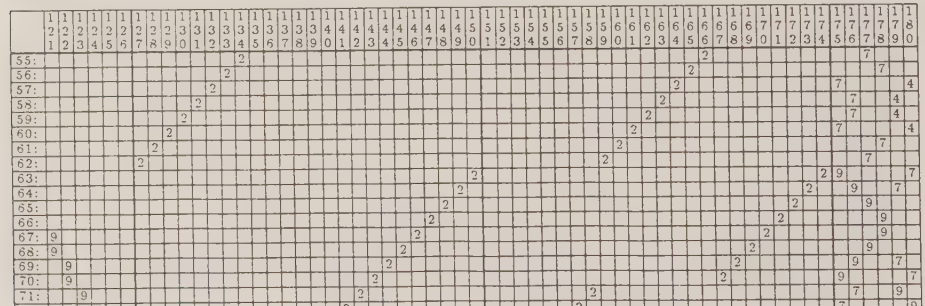


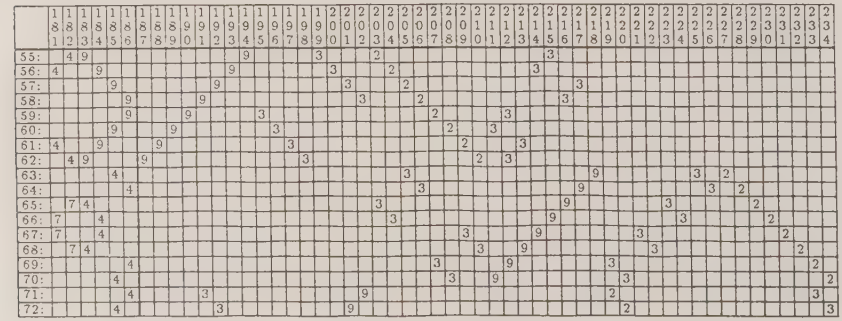


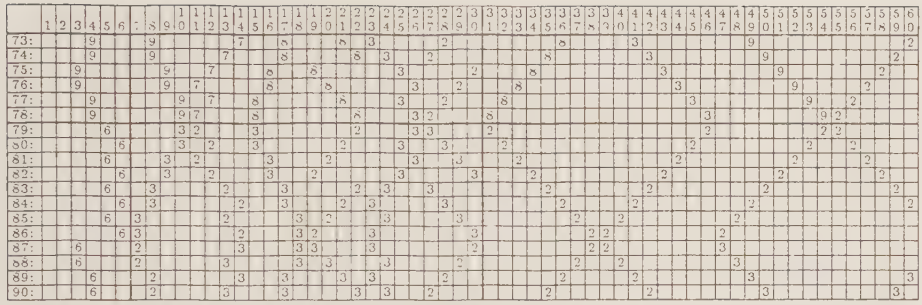


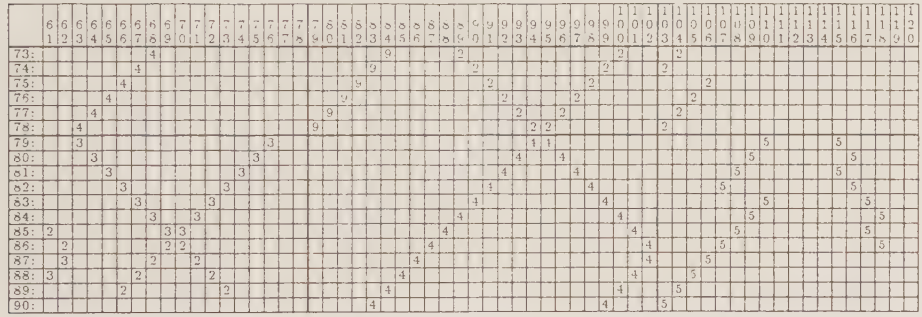


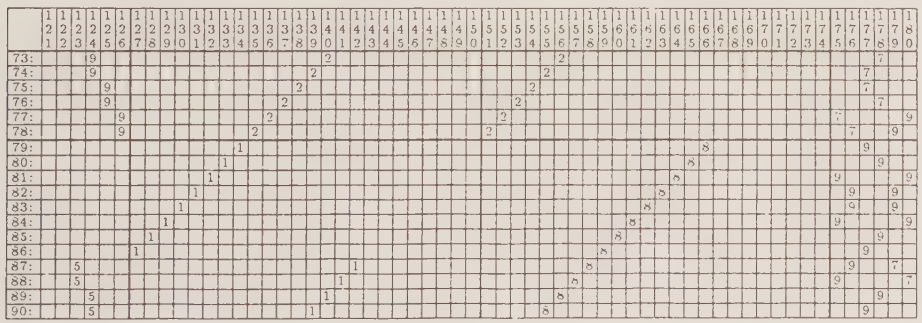


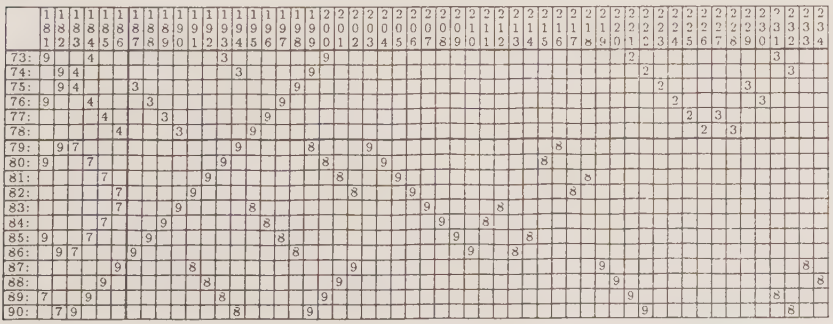


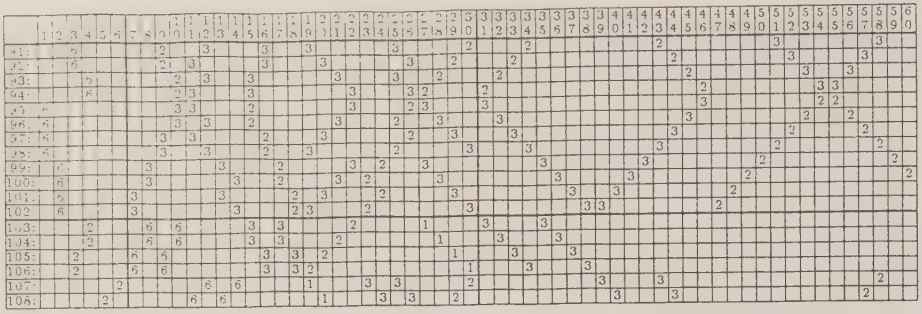


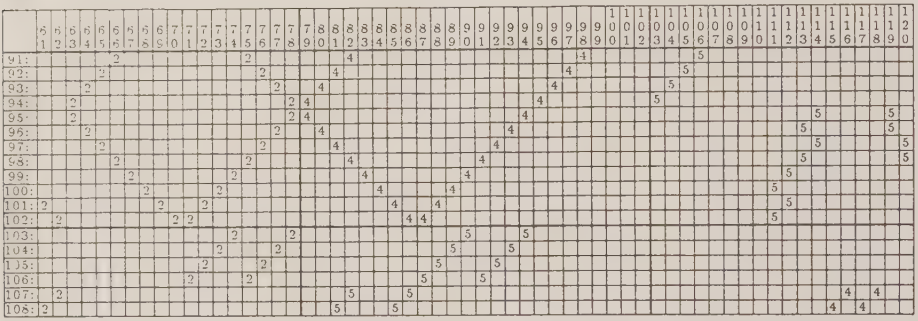


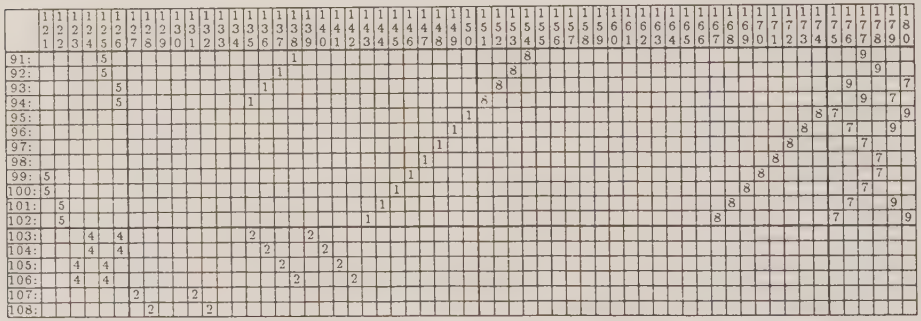


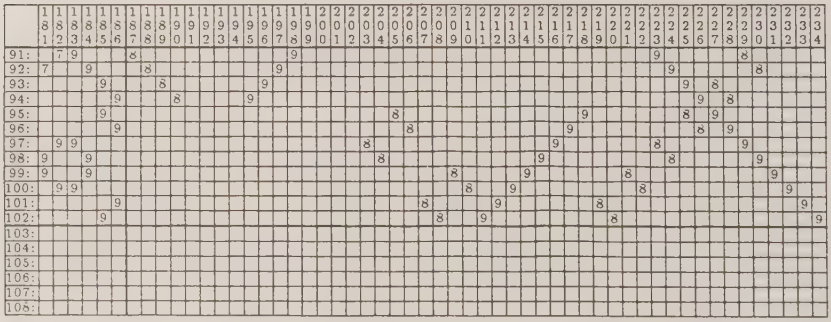


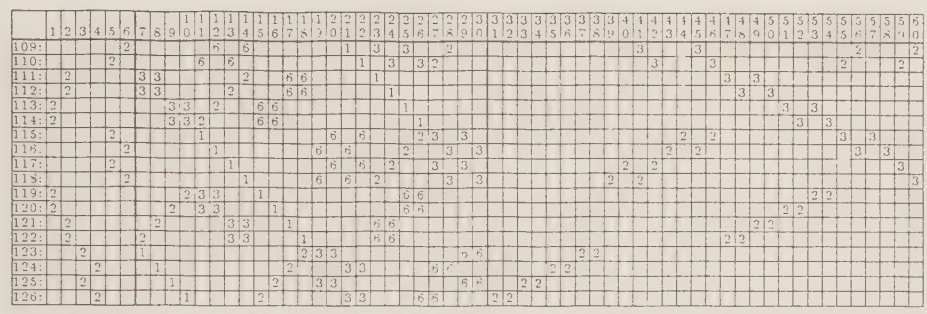


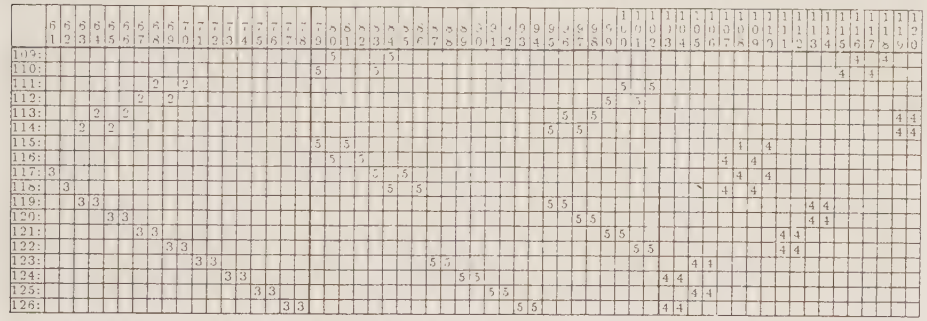


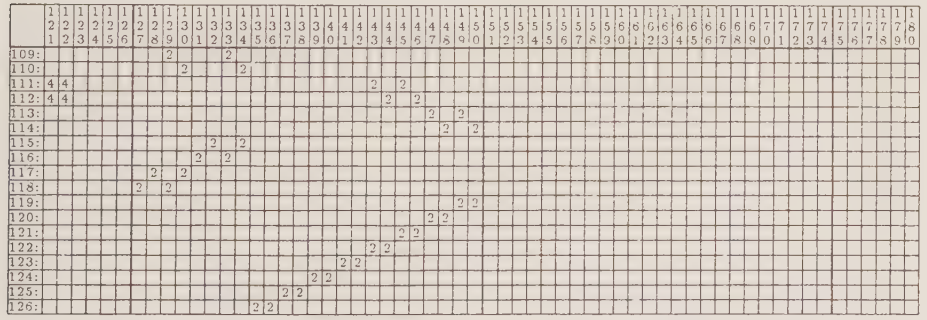


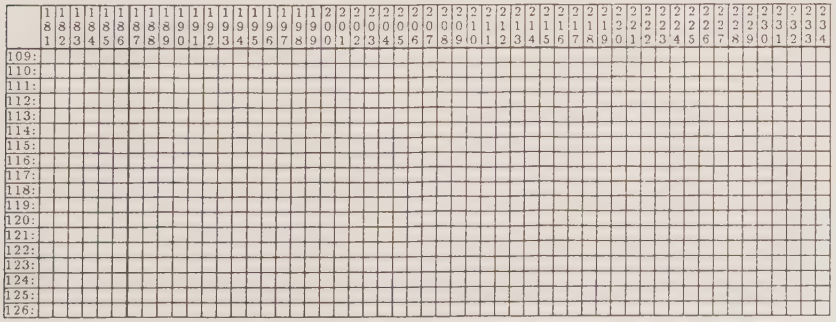


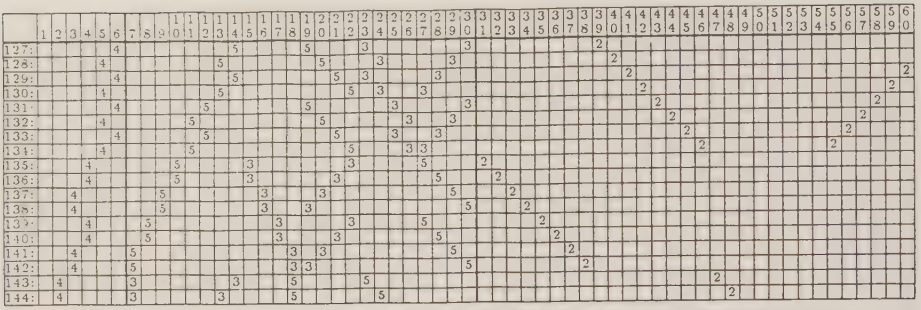


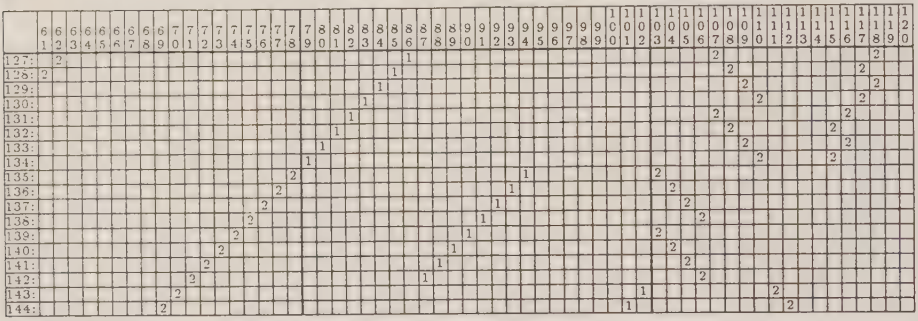


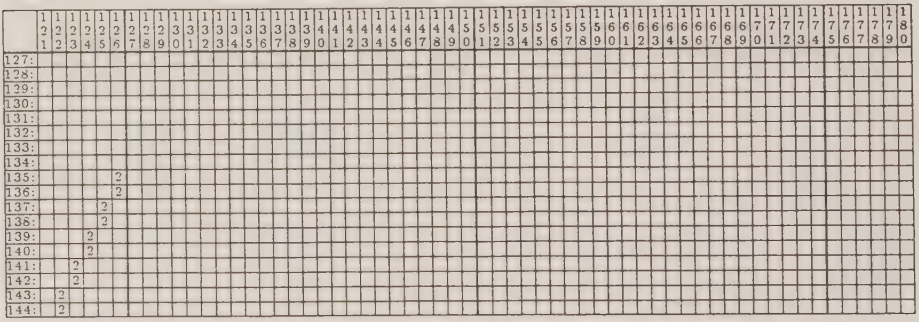


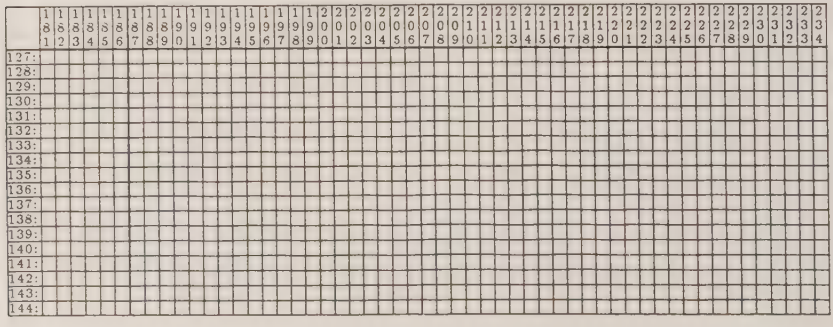


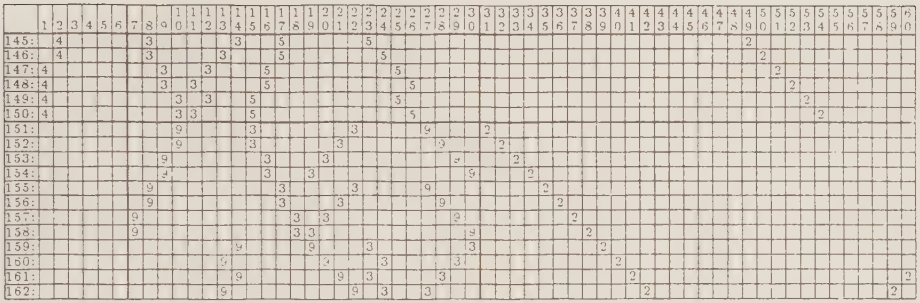


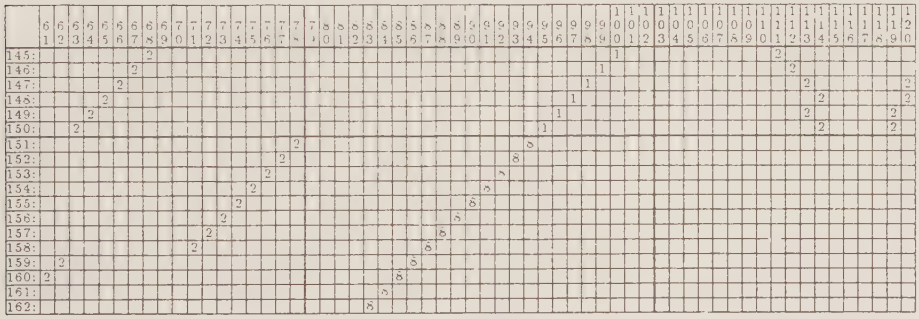


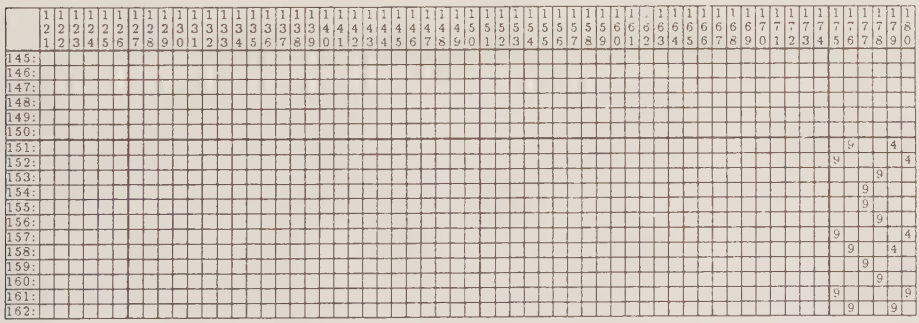


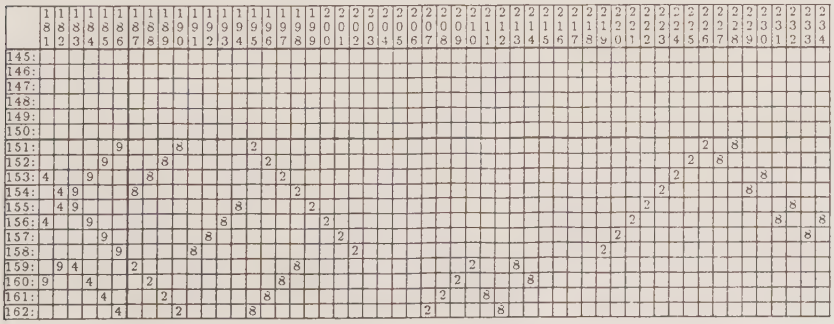


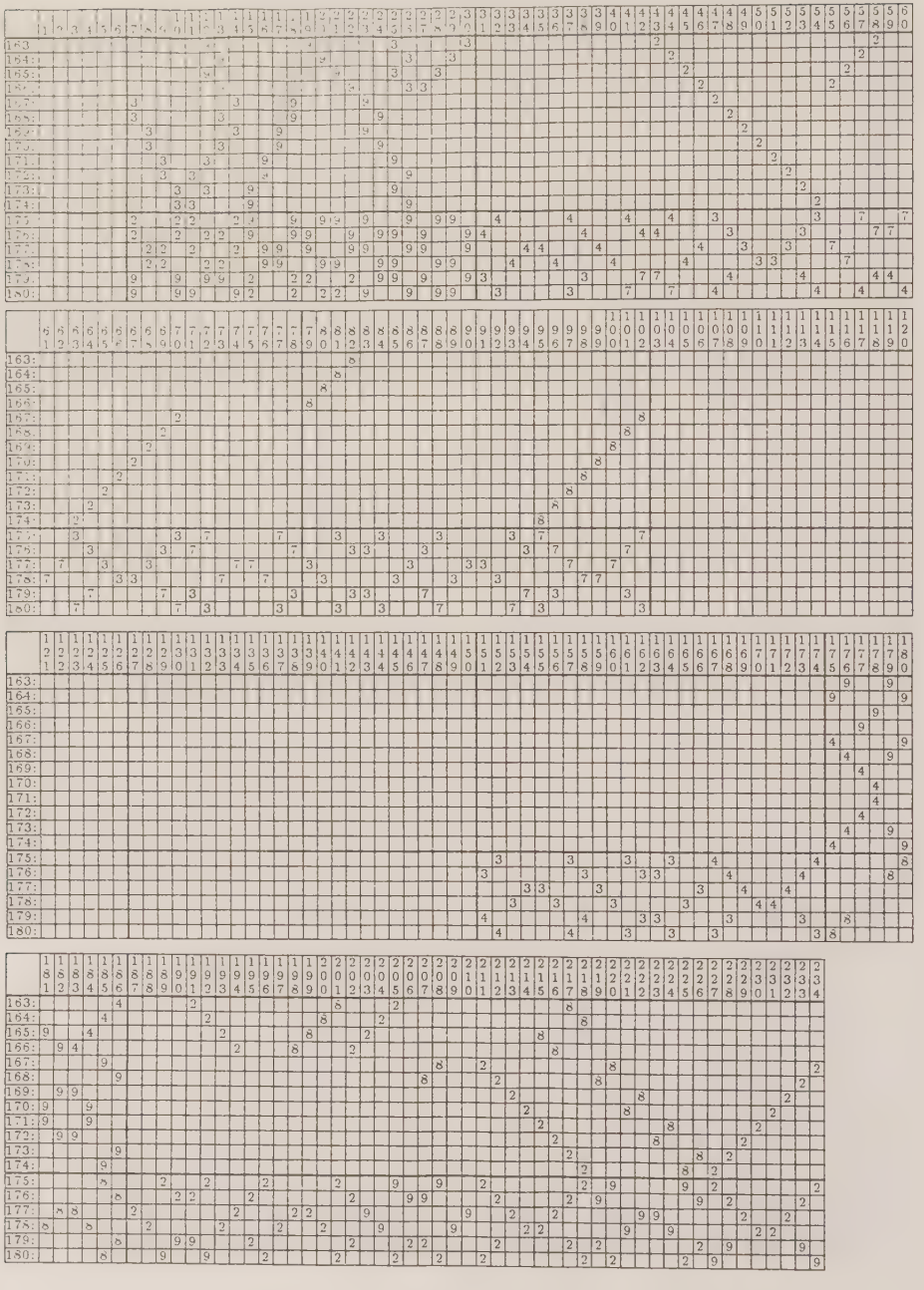


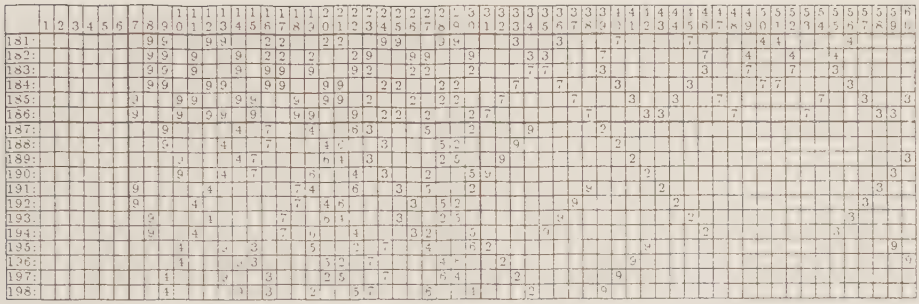


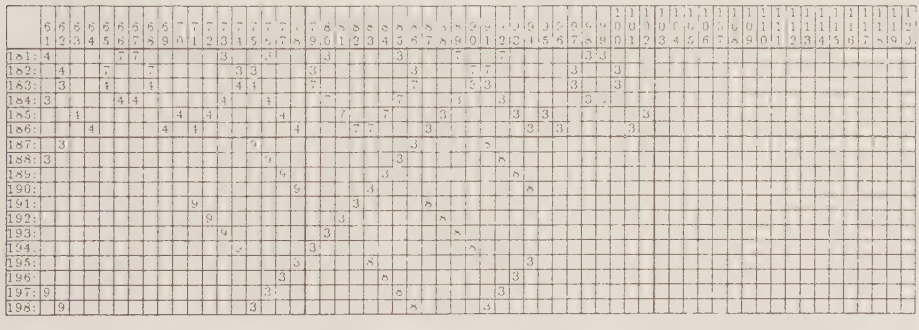


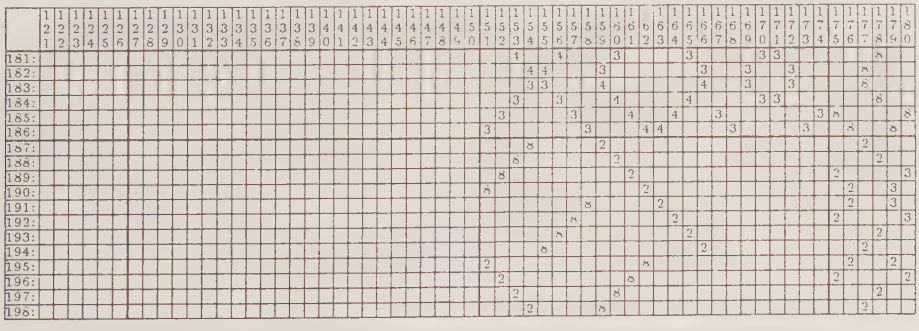


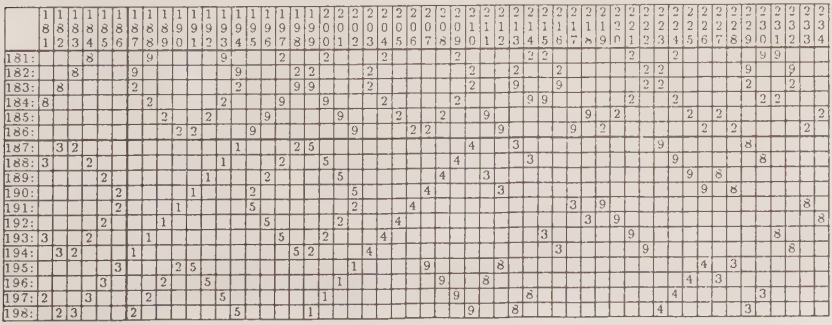


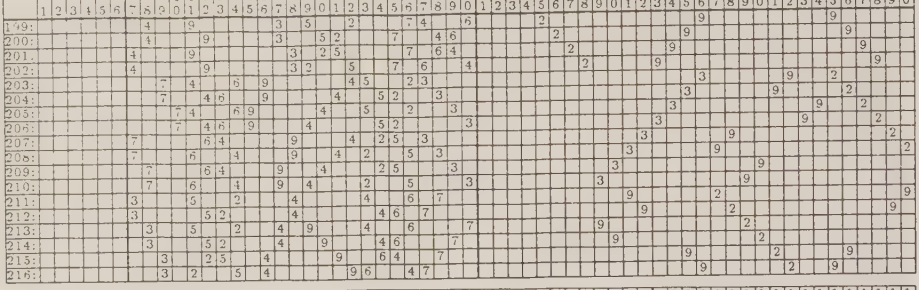


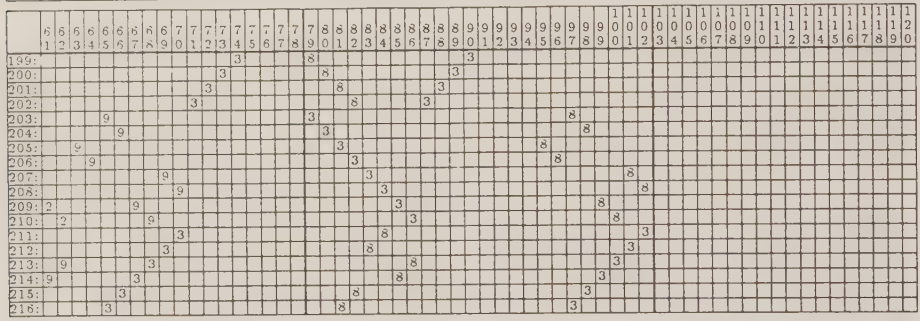


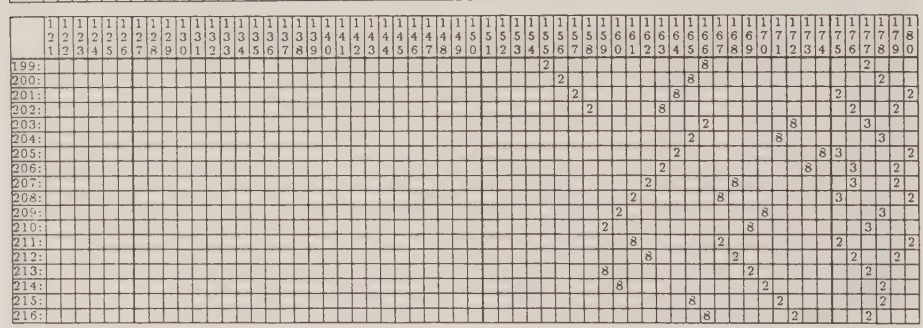


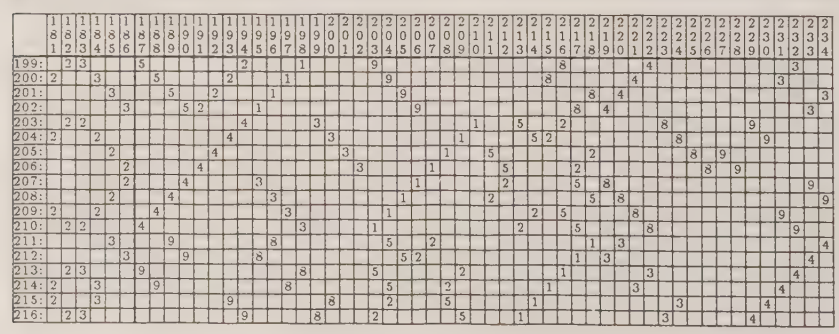


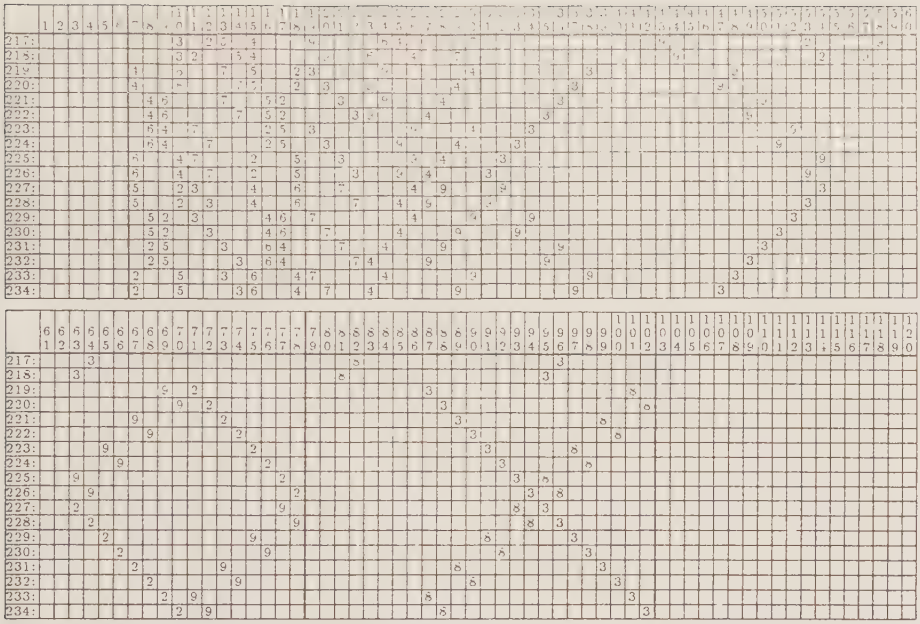




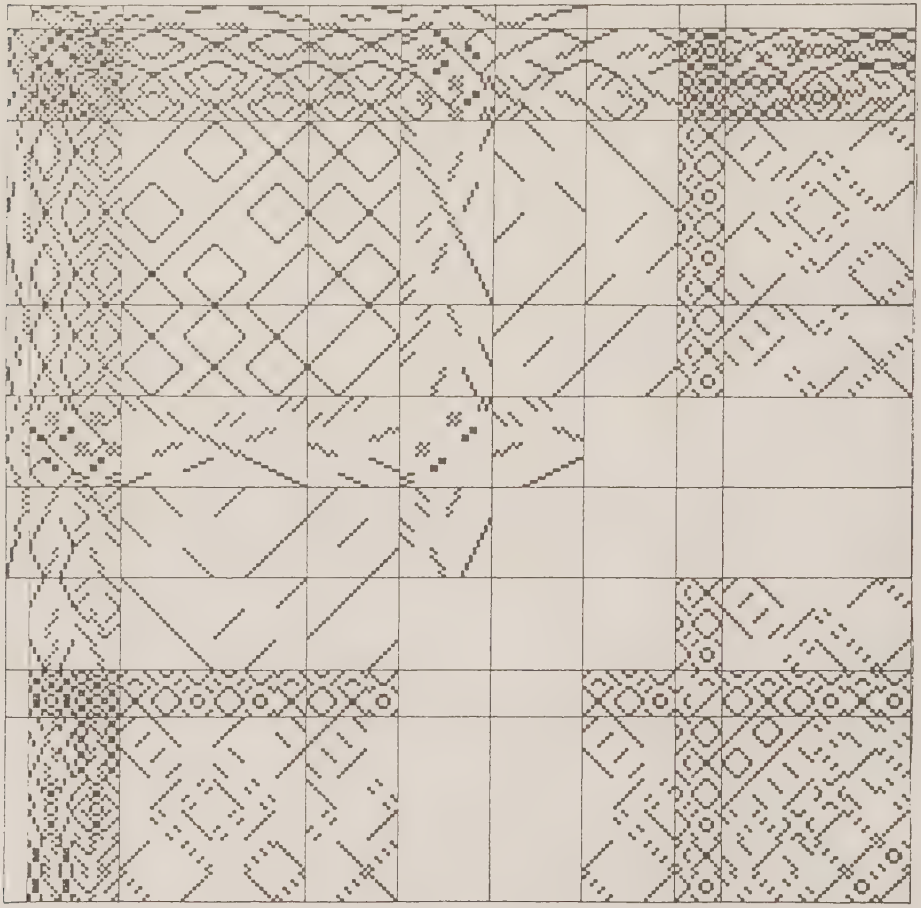








Stellt man das Schnittverhalten in einer Graphik dar, in der jeweils für den Fall des Schnittes ein Punkt steht, erhält man folgendes Bild:



Die entstehenden Muster haben immer eine Größe von acht oder vier Punkten. Das liegt daran, daß bei der Erzeugung aller Basen zu einer festen Basis zunächtst alle Basen betrachtet werden, die sich durch Invertieren der Basiselemente von $\sigma$ ergeben. Die Größe vier entsteht dadurch, daß von diesen acht entstehenden Basen noch je zwei zur gleichen Komponente gehören können.

## Literatur

[CV] Marc Culler, Karen Vogtmann: *Moduli of graphs and automorphisms of free groups* , **Inventiones mathematicae 84(1986), 91–119.**

[G] Jürgen Grosche: *Über die Fundamentalgruppe von Quotientenräumen Siegelscher Modulgruppen* , **Journal für reine und angewandte Mathematik 281(1976), 53–79.**

[GH] Lothar Gerritzen, Frank Herrlich: *The extended Schottky space* , **Journal für reine und angewandte Mathematik 389(1988), 190–208.**

[GHP] Lothar Gerritzen, Frank Herrlich, Marius van der Put: *Stable n-pointed trees of projective lines* , **Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen 91(1988), 131–163.**

[H] A. H. M. Hoare: *On length functions and Nielsen methods in free groups* , **Journal of the London Mathematical Society 14(1976) (Series 2), 188–192.**

[HK] Holger Heidrich, Friedrich Knöller: *Über die Fundamentalgruppen Siegelscher Modulvarietäten vom Grade 2* , **manuscripta mathematicae 57(1987), 249–262.**

[K] Egbert van Kampen: *The fundamental groups of some related spaces* , **American Journal of Mathematics 55(1933), 261–267.**

[P] Meinolf Piwek: *The formal Teichmüller space*, **preprint.**

[S] Jean-Pierre Serre: *Trees*, Springer New York Heidelberg Berlin, 1980.

Lebenslauf

| | |
|---|---|
| 29.2.64 | geboren in Menden(Sauerland) |
| 1970–1974 | Besuch der Bodelschwingh-Grundschule in Menden |
| 1974–1983 | Besuch des Walramgymnasiums in Menden |
| 18.6.1983 | Abitur |
| 1983–1987 | Studium der Mathematik in Bochum |
| 13.10.1987 | Abschluß des Studiums |
| 15.10.1987 | Einstellung als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Bochum |